



**HAL**  
open science

# Calcul traitable de la réparation fermée possibiliste pour les ontologies partiellement pré-ordonnées

Sihem Belabbes, Salem Benferhat, Ahmed Laouar

## ► To cite this version:

Sihem Belabbes, Salem Benferhat, Ahmed Laouar. Calcul traitable de la réparation fermée possibiliste pour les ontologies partiellement pré-ordonnées. LFA 2022 - RENCONTRES FRANCOPHONES SUR LA LOGIQUE FLOUE ET SES APPLICATIONS, Oct 2022, Toulouse, France. hal-04270652

**HAL Id: hal-04270652**

**<https://univ-artois.hal.science/hal-04270652>**

Submitted on 4 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul traitable de la réparation fermée possibiliste pour les ontologies partiellement pré-ordonnées

Sihem Belabbes<sup>1</sup>

Salem Benferhat<sup>2</sup>

Ahmed Laouar<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LIASD, IUT de Montreuil, Univ. Paris 8 Montreuil, France

<sup>2</sup> CRIL, Univ. Artois & CNRS, Lens, France

belabbes@iut.univ-paris8.fr, {benferhat, laouar}@cril.fr

## Résumé :

Nous nous intéressons aux ontologies légères, où l'ensemble de données (ABox) comporte des incohérences par rapport aux connaissances terminologiques (TBox). En outre, nous supposons que les données sont incertaines et obtenues de sources multiples qui ne partagent pas les mêmes échelles d'évaluation. Les données sont alors munies de degrés de fiabilité ordonnés selon un ordre partiel pour capturer l'incomparabilité. Récemment, une méthode efficace a été proposée dans le cadre possibiliste pour raisonner avec des ontologies incohérentes partiellement pré-ordonnées. Cette méthode calcule en un temps polynomial une réparation partiellement pré-ordonnée pour la base ABox, à partir de l'intersection des réparations possibilistes associées à toutes les bases compatibles avec l'ordre partiel. Nous proposons une nouvelle méthode qui calcule une réparation plus productive, en considérant l'intersection de la fermeture déductive de chacune des réparations possibilistes. Nous montrons que cette méthode est traitable grâce à une caractérisation polynomiale qui réduit le calcul à fournir des réponses à des requêtes de type instance checking.

## Mots-clés :

Ontologies formelles. Incohérence. Incertitude.

## Abstract:

We focus on lightweight ontologies, where the dataset (ABox) is inconsistent with respect to the terminological knowledge (TBox). Furthermore, we assume that the dataset is uncertain and obtained from multiple sources with different evaluation scales. We equip the dataset with reliability degrees ordered according to a partial order to capture incomparability. Recently, an efficient method has been proposed in the possibilistic framework for reasoning with partially preordered inconsistent ontologies. This polynomial method computes a partially preordered repair for the ABox, from the intersection of possibilistic repairs associated with all the compatible bases of the partial order. In this paper, we introduce a new method that computes a more productive repair, by considering the intersection of the deductive closure of each one of the possibilistic repairs. We show that this method is tractable thanks to a polynomial characterization that reduces the computation into answering instance checking queries.

## Keywords:

Formal ontologies. Inconsistency. Uncertainty.

## 1 Introduction

Le problème de la gestion des incohérences dans les ontologies spécifiées dans les logiques DL-Lite [8] a fait l'objet de nombreuses études. En effet, ces fragments légers offrent une expressivité satisfaisante alliée à des propriétés calculatoires très favorables. En particulier, le dialecte DL-Lite $\mathcal{R}$  permet d'interroger des ontologies en un temps traitable [8, 1].

Une ontologie est composée d'une base TBox de connaissances terminologiques représentées par des axiomes, et d'une base ABox de données factuelles appelées des assertions. Le contenu de la TBox est souvent considéré stable et sans conflit, alors que le contenu de la ABox est obtenu de plusieurs sources hétérogènes. Les assertions peuvent donc être conflictuelles par rapport aux axiomes.

Des sémantiques tolérantes à l'inconsistance ont été proposées afin de permettre d'interroger des ontologies incohérentes. La sémantique IAR (*Intersection of ABox Repair*) [9] est parmi les plus connues. Elle repose sur la notion de réparation, qui est une sous-base de la ABox maximale cohérente. Une assertion est alors dérivée d'une ABox incohérente si elle appartient à l'intersection de toutes les réparations de la ABox. L'avantage de la sémantique IAR est que cette inférence s'effectue en un temps polynomial dans les ontologies DL-Lite $\mathcal{R}$  [8].

Dans ce travail, nous supposons que les assertions sont incertaines, et qu'elles sont munies de degrés de fiabilité pouvant être incomparables. Nous supposons qu'un ordre partiel strict est

appliqué aux degrés de fiabilité, et donc les assertions sont partiellement pré-ordonnées.

Récemment, une méthode efficace a été proposée dans l'esprit de la sémantique IAR pour des ontologies DL-Lite $\mathcal{R}$  possibilistes partiellement pré-ordonnées [3, 4]. Elle consiste à considérer toutes les extensions du pré-ordre partiel défini sur les assertions, ce qui génère autant de bases compatibles avec la ABox initiale. Puis la réparation possibiliste [7] de chaque base compatible est calculée. Enfin, l'intersection de toutes ces réparations possibilistes produit une réparation unique pour la ABox. Une caractérisation équivalente [3, 4] calcule cette réparation en un temps polynomial par rapport à la taille de la ABox. Une deuxième caractérisation équivalente qui est plus efficace a également été proposée [5].

Dans cet article, nous proposons une nouvelle stratégie pour obtenir une réparation plus productive tout en étant saine pour une KB DL-Lite $\mathcal{R}$  partiellement pré-ordonnée. Elle applique la fermeture déductive des réparations possibilistes associées aux bases compatibles, avant de calculer leur intersection.

Dans la littérature, la notion de fermeture déductive est souvent utilisée pour augmenter la productivité d'une réparation. Cependant, cela augmente souvent la complexité calculatoire. Par exemple, l'interrogation (*query answering*) d'une ABox est traitable avec la sémantique IAR, alors qu'elle ne l'est pas si les requêtes sont posées sur l'intersection de la fermeture déductive de toutes les réparations de la ABox. En fait, la complexité est NP-complet [2]. Cependant, afin que la nouvelle méthode présente un intérêt, il ne suffit pas qu'elle retourne une réparation plus productive. Elle doit idéalement avoir des propriétés calculatoires favorables.

Nous montrons un résultat important où la fermeture déductive de toutes les bases compatibles augmente la productivité de la réparation possibiliste partiellement pré-ordonnée, sans compromettre la traitabilité, et tout en permet-

tant de dériver des conclusions saines.

Cet article est structuré comme suit. La section 2 présente DL-Lite $\mathcal{R}$ . La section 3 présente la méthode de réparation possibiliste partiellement pré-ordonnée. La section 4 introduit la nouvelle méthode utilisant la notion de fermeture déductive. Nous montrons que son calcul est traitable en DL-Lite $\mathcal{R}$ . Enfin, nous discutons les travaux futurs et concluons l'article.

## 2 Rappels sur la logique DL-Lite $\mathcal{R}$

La logique DL-Lite $\mathcal{R}$  permet de formaliser des ontologies et de les interroger de manière efficace [8, 1]. Une base de connaissances (KB), notée  $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ , est composée d'un ensemble fini d'axiomes  $\mathcal{T}$  appelé TBox, et d'un ensemble fini d'assertions  $\mathcal{A}$  appelé ABox.

La KB est construite à partir de trois ensembles finis et mutuellement disjoints  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{I}$ , contenant respectivement des noms de concepts, de rôles et d'individus, selon la syntaxe suivante :

$$\begin{aligned} R &:= P \mid P^-, & E &:= R \mid \neg R, \\ B &:= A \mid \exists R, & C &:= B \mid \neg B, \end{aligned}$$

où  $A \in \mathcal{C}$ ,  $P \in \mathcal{R}$ ,  $P^-$  est l'inverse de  $P$ . De plus,  $R$  et  $E$  sont des rôles,  $B$  et  $C$  sont des concepts. Les axiomes de  $\mathcal{T}$  sont des inclusions de concepts du type  $B \sqsubseteq C$ , et des inclusions de rôles du type  $R \sqsubseteq E$ . Les axiomes sans symbole de négation à droite de l'inclusion sont des *axiomes positifs*. Les assertions de  $\mathcal{A}$  sont de la forme  $A(a)$  ou  $P(a, b)$ , où  $a, b \in \mathcal{I}$ .

La sémantique DL-Lite $\mathcal{R}$  définit une interprétation comme un tuple  $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ , où  $\Delta^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$  est un domaine (pouvant être infini) et  $\cdot^{\mathcal{I}}$  est une fonction d'interprétation qui associe chaque  $A \in \mathcal{C}$  à  $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ , chaque  $P$  à  $P^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$ , et chaque  $a$  à  $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ .

La fonction  $\cdot^{\mathcal{I}}$  s'étend pour interpréter les concepts et les rôles comme suit :

$$\begin{aligned} (P^-)^{\mathcal{I}} &= \{(y, x) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \mid (x, y) \in P^{\mathcal{I}}\}; \\ (\exists R)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ t.q. } (x, y) \in R^{\mathcal{I}}\}; \\ (\neg B)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus B^{\mathcal{I}}; (\neg R)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \setminus R^{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Une interprétation  $\mathcal{I}$  satisfait  $B \sqsubseteq C$  si  $B^{\mathcal{I}} \subseteq C^{\mathcal{I}}$ , et  $R \sqsubseteq E$  si  $R^{\mathcal{I}} \subseteq E^{\mathcal{I}}$ . Elle satisfait  $A(a)$  si  $a^{\mathcal{I}} \in A^{\mathcal{I}}$ , et  $P(a, b)$  si  $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in P^{\mathcal{I}}$ . Elle est un modèle de  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ), noté  $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ ), si  $\mathcal{I} \models \varphi$  pour tout  $\varphi$  dans  $\mathcal{T}$  (resp. dans  $\mathcal{A}$ ). Elle est un modèle de  $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$  si  $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$  et  $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ .

Une KB  $\mathcal{K}$  est consistante<sup>1</sup> si elle admet au moins un modèle, sinon elle est inconsistante. Nous supposons que la TBox est cohérente, donc pour tout  $A \in \mathcal{C}$ , il existe un modèle  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ , tel que  $A^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ .

### 3 KB DL-Lite $\mathcal{R}$ partiellement pré-ordonnée

Nous présentons l'extension possibiliste de DL-Lite $\mathcal{R}$  lorsque les assertions sont partiellement pré-ordonnées [4]. Les assertions sont munies de poids symboliques, représentant des degrés de priorité. Ces poids sont définis sur un ensemble non vide et partiellement ordonné,  $U = \{u_1, \dots, u_n, \mathbb{1}\}$ , où le poids  $\mathbb{1}$  représente la certitude complète, donc il est strictement préféré aux éléments de  $U \setminus \{\mathbb{1}\}$ . Soit  $\mathbb{L} = (U, \triangleright)$  une échelle d'incertitude partiellement ordonnée, où  $\triangleright$  est un ordre partiel strict (relation irreflexive et transitive). L'incomparabilité est notée  $u_i \bowtie u_j$  (donc  $u_i \not\triangleright u_j$  et  $u_j \not\triangleright u_i$ ).

Une KB DL-Lite $\mathcal{R}$  partiellement pré-ordonnée est un triplet  $\mathcal{K}_{\triangleright} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}_{\triangleright}, \mathbb{L} \rangle$  dans laquelle  $\mathcal{A}_{\triangleright} = \{(\varphi_i, u_i) \mid \varphi_i \text{ est une assertion DL-Lite}_{\mathcal{R}}, u_i \in U \setminus \{\mathbb{1}\}\}$ . Il est supposé que pour chaque  $\varphi_i$ , un seul  $u_i$  est affecté.

Soit  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})$  l'ensemble de tous les conflits de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$ , où un conflit est une sous-base de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  minimale inconsistante. Une assertion est  $\pi$ -acceptée [3, 4] si elle est strictement préférée à au moins une assertion de chaque conflit.

**Définition 1.** Une assertion  $(\varphi_i, u_i) \in \mathcal{A}_{\triangleright}$  est  $\pi$ -acceptée si :  $\forall \mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright}), \exists (\varphi_j, u_j) \in \mathcal{C}, \varphi_i \neq \varphi_j, t.q. u_i \triangleright u_j$ .

1. Dans la suite, le terme consistance désigne la cohérence, et le terme cohérence désigne la satisfiabilité des assertions par rapport aux axiomes.

La Définition 1 est une caractérisation de l'ensemble des assertions  $\pi$ -acceptées, noté  $\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ , qui constitue la réparation possibiliste partiellement pré-ordonnée de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$ . Cette réparation  $\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$  s'obtient en un temps polynomial par rapport à la taille de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  [3, 4]. En effet, l'ensemble des conflits  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})$  s'obtient en un temps polynomial en DL-Lite $\mathcal{R}$  [8]. Par ailleurs, le fait de vérifier si une assertion  $(\varphi_i, u_i)$  de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  est  $\pi$ -acceptée nécessite de parcourir tous les conflits de  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})$ , ce qui requiert un temps linéaire par rapport à la taille de  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})$ .

De façon équivalente [3, 4],  $\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$  s'obtient en considérant toutes les bases compatibles associées à la relation  $\triangleright$ . Il s'agit ensuite de calculer la réparation possibiliste [7] de chaque base compatible, puis de prendre l'intersection de toutes ces réparations.

Rappelons d'abord les notions de degré d'inconsistance et de réparation possibiliste d'une base ABox pondérée totalement pré-ordonnée [4].

**Définition 2.** Soit  $\mathcal{K}_{\triangleright} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}_{\triangleright} \rangle$  une KB où  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  est totalement pré-ordonnée, et  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})$  l'ensemble de conflits.

$$\text{Inc}(\mathcal{A}_{\triangleright}) = \max_{\mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})} \{ \min \{ \alpha \mid (\varphi, \alpha) \in \mathcal{C} \} \}$$

avec  $\max(\emptyset) = 0$ .

La réparation possibiliste de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  est :

$$\mathcal{R}_{\pi}(\mathcal{A}_{\triangleright}) = \{ \varphi \mid (\varphi, \alpha) \in \mathcal{A}_{\triangleright} \text{ et } \alpha > \text{Inc}(\mathcal{A}_{\triangleright}) \}.$$

**Exemple 1.** Soit une KB pondérée  $\mathcal{K}_{\triangleright} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}_{\triangleright} \rangle$ , avec  $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \neg D, C \sqsubseteq \neg D, D \sqsubseteq B\}$ , et les assertions sont munies de poids réels dans  $]0, 1]$ . On obtient une ABox totalement pré-ordonnée, telle que :

$$\mathcal{A}_{\triangleright} = \left\{ \begin{array}{l} (A(a), 0.9), (C(b), 0.9), \\ (A(b), 0.8), (B(a), 0.8), \\ (C(a), 0.7), (B(b), 0.6), \\ (D(b), 0.5), (D(a), 0.4) \end{array} \right\}$$

L'ensemble des conflits est donné par :

$$\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright}) = \left\{ \begin{array}{l} \{(A(a), 0.9), (D(a), 0.4)\}, \\ \{(C(a), 0.7), (D(a), 0.4)\}, \\ \{(A(b), 0.8), (D(b), 0.5)\}, \\ \{(C(b), 0.9), (D(b), 0.5)\} \end{array} \right\}$$

Le degré d'inconsistance est :  $\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}) =$

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \min\{0.9, 0.4\}, \min\{0.7, 0.4\}, \\ \min\{0.8, 0.5\}, \min\{0.9, 0.5\} \end{array} \right\}$$

Donc,  $\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}) = 0.5$ .

Ainsi, on obtient :  $\mathcal{R}_{\pi}(\mathcal{A}_{>}) = \{A(a), C(b), A(b), B(a), C(a), B(b)\}$ .  $\square$

La prochaine section introduit une méthode pour obtenir une réparation plus productive que  $\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$  sans augmenter le temps de calcul.

## 4 Réparation fermée possibiliste

Nous proposons une méthode qui calcule une sous-base consistante saine et plus productive que la réparation possibiliste partiellement pré-ordonnée. Une façon naturelle de parvenir à cet objectif est d'utiliser la notion de *fermeture déductive positive*, dans laquelle la fermeture de la ABox est obtenue à partir des axiomes positifs de la TBox. Ceci garantit la consistance des éléments dérivés. Nous rappelons d'abord la définition de l'opérateur de fermeture [8, 6] :

**Définition 3.** Soit  $\mathcal{T}_p$  l'ensemble de tous les axiomes positifs d'une TBox  $\mathcal{T}$ . La fermeture déductive d'une ABox  $\mathcal{A}$  par rapport à  $\mathcal{T}$  est :  $cl(\mathcal{A}) = \{B(a) \mid \langle \mathcal{T}_p, \mathcal{A} \rangle \models B(a) \text{ t.q. } B \text{ est un concept de } \mathcal{T}, a \text{ est un individu de } \mathcal{A}\} \cup \{R(a, b) \mid \langle \mathcal{T}_p, \mathcal{A} \rangle \models R(a, b) \text{ t.q. } R \text{ est un rôle de } \mathcal{T}, a \text{ et } b \text{ sont des individus de } \mathcal{A}\}$ .

Le symbole  $\models$  est une relation d'inférence standard en DL-Lite $\mathcal{R}$ .

L'application de la fermeture déductive sur un ensemble de réparations cause souvent une augmentation de la complexité. Notre nouvelle méthode permet d'augmenter la productivité de la réparation possibiliste, en utilisant la fermeture déductive, sans surcoût.

### 4.1 Calcul de la réparation

La fermeture déductive positive peut être appliquée de deux façons différentes. A savoir, soit sur la ABox initiale  $\mathcal{A}_{\triangleright}$ , ou alors sur toutes

les réparations possibilistes associées aux bases compatibles de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$ .

Dans le premier cas, le fait d'appliquer la fermeture positive à la base initiale (dans l'esprit de la sémantique ICAR, pour des bases ABox non-prioritaires [9]) pose deux problèmes. D'un point de vue sémantique, on peut s'interroger sur le fait d'appliquer la fermeture déductive à la ABox initiale, car des conclusions pourraient être déduites d'assertions discutables. Par exemple, soit une TBox  $\mathcal{T} = \{B \sqsubseteq E, A \sqsubseteq \neg B, A \sqsubseteq C\}$  et une ABox  $\mathcal{A}_{\triangleright} = \{(A(a), u_1), (B(a), u_2), (C(a), u_3)\}$ , où l'ordre partiel  $\triangleright$  est tel que l'assertion  $A(a)$  est strictement préférée à l'assertion  $B(a)$  (donc,  $u_1 \triangleright u_2$ ). Ici, l'assertion  $B(a)$  est discutable car elle contredit l'assertion  $A(a)$  qui est  $\pi$ -acceptée. Il s'ensuit que le fait d'inclure  $E(a)$  dans la réparation est à remettre en cause car elle est issue d'une assertion discutable de  $\mathcal{A}_{\triangleright}$ .

D'autre part, la fiabilité des éléments peut être définie de plusieurs façons. Par exemple, supposons que la TBox contienne  $\{A \sqsubseteq B, E \sqsubseteq B\}$  et que la ABox contienne  $\{(A(b), u_1), (E(b), u_2)\}$ , où  $u_1 \bowtie u_2$ . L'assertion  $B(b)$  est dérivée de  $A(b)$  mais aussi de  $E(b)$ . La question est alors quel poids  $u_3$  devrait être affecté à  $B(b)$ . L'intuition est de considérer l'assertion  $B(b)$  comme étant *au moins aussi plausible que*  $A(b)$  et  $E(b)$  (donc,  $u_3 = \max\{u_1, u_2\}$ ), mais cela n'est pas simple à définir de manière générale.

La seconde option utilise l'opérateur de fermeture  $cl(\cdot)$ , et considère la fermeture des réparations possibilistes de toutes les bases compatibles. Ceci est plus sûr car les conclusions rajoutées sont obtenues des réparations possibilistes, qui contiennent uniquement des assertions sûres. Ainsi, en présence d'un ordre partiel, une réparation plus productive est calculée à partir de l'intersection des fermetures des réparations possibilistes associées aux bases compatibles de la base ABox partiellement pré-ordonnées. Formellement :

**Définition 4.** Soient  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  une ABox partiellement pré-ordonnée,  $\mathcal{A}_{>}$  une base compatible

de  $\mathcal{A}_\triangleright$  et  $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  sa réparation. La réparation fermée possibiliste partiellement pré-ordonnée de  $\mathcal{A}_\triangleright$ , notée  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ , est donnée par :

$$c\pi(\mathcal{A}_\triangleright) = \bigcap \{cl(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright)) \mid \mathcal{A}_\triangleright \text{ est une base compatible de } \mathcal{A}_\triangleright\}.$$

L'exemple suivant illustre le fait que la réparation fermée  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  est plus productive que la réparation possibiliste  $\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ , et également sa fermeture  $cl(\pi(\mathcal{A}_\triangleright))$ .

**Exemple 2.** Soit une KB partiellement pré-ordonnée avec :

$$\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \neg D, B \sqsubseteq \neg C, A \sqsubseteq F, B \sqsubseteq F\}, \text{ et } \\ \mathcal{A}_\triangleright = \{(A(a), u_1), (B(a), u_2), (C(a), u_3), \\ (D(a), u_4), (E(a), u_5)\}.$$

Soit  $\triangleright$  l'ordre partiel strict défini sur l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_5, \mathbb{1}\}$  tel que :

$$\mathbb{1} \triangleright u_5 \triangleright u_1 \triangleright u_3 \quad \text{et} \quad \mathbb{1} \triangleright u_5 \triangleright u_2 \triangleright u_4.$$

De plus,  $u_1 \bowtie u_2, u_1 \bowtie u_4, u_2 \bowtie u_3$  et  $u_3 \bowtie u_4$ .

Il est aisé de calculer :

$$Cf(\mathcal{A}_\triangleright) = \left\{ \begin{array}{l} \{(A(a), u_1), (D(a), u_4)\}, \\ \{(B(a), u_2), (C(a), u_3)\} \end{array} \right\}$$

La seule assertion  $\pi$ -acceptée est  $(E(a), u_5)$  car elle est strictement préférée à au moins une assertion de chaque conflit. Donc, la réparation possibiliste est :  $\pi(\mathcal{A}_\triangleright) = \{E(a)\}$ .

Soit une échelle arbitraire  $\mathcal{E}$  telle que :  $\mathcal{E}(u_5) = 0.9, \mathcal{E}(u_4) = 0.2, \mathcal{E}(u_3) = 0.7, \mathcal{E}(u_2) = 0.6$  et  $\mathcal{E}(u_1) = 0.8$ . L'échelle  $\mathcal{E}$  est compatible car elle vérifie :  $\forall u_i, \forall u_j \in \{u_1, \dots, u_5\}$ , si  $u_i \triangleright u_j$  alors  $\mathcal{E}(u_i) > \mathcal{E}(u_j)$ .

Donc la ABox  $\mathcal{A}_\triangleright = \{(A(a), 0.8), (B(a), 0.6), (C(a), 0.7), (D(a), 0.2), (E(a), 0.9)\}$  est compatible avec  $\mathcal{A}_\triangleright$ . On peut aussi calculer  $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright) = \{(A(a), C(a), E(a))\}$ .

Pour chaque base compatible  $\mathcal{A}_\triangleright$ , on peut vérifier que soit  $A(a)$ , soit  $B(a)$  est dans  $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ . De ce fait, grâce aux axiomes positifs  $A \sqsubseteq F, B \sqsubseteq F$  de  $\mathcal{T}$ , on peut toujours déduire  $F(a)$ . Donc  $F(a) \in cl(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright))$ .

Il se trouve que  $F(a)$  est la seule assertion supplémentaire obtenue en utilisant l'opérateur de fermeture. Donc la réparation fermée possibiliste est :  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright) = \{E(a), F(a)\}$ .

Ainsi,  $\pi(\mathcal{A}_\triangleright) \subsetneq c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ .  $\square$

## 4.2 Caractérisation de la réparation fermée possibiliste totalement pré-ordonnée

Le calcul de  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  (donné par la Définition 4) requiert l'application de l'opérateur de fermeture à toutes les réparations associées aux bases compatibles. Cette section donne une caractérisation pour l'application de la fermeture d'une ABox pondérée totalement pré-ordonnée, qui permet de d'établir une caractérisation pour le calcul de  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ .

Dans ce qui suit, nous décrivons les conditions sous lesquelles une assertion appartient ou pas à la fermeture d'une ABox DL-Lite $\mathcal{R}$  possibiliste (totalement pré-ordonnée). Le résultat ci-après donne une première caractérisation basée sur la notion de degré d'inconsistance.

**Lemme 1.** Soient  $\mathcal{K}_\triangleright = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}_\triangleright \rangle$  une KB possibiliste,  $B$  (resp.  $R$ ) un concept (resp. un rôle), et  $a, b$  deux individus. Soit  $N_B$  (resp.  $N_R$ ) un concept atomique (resp. un rôle atomique) n'appartenant pas à  $\mathcal{T}$ .

Soient  $\mathcal{K}_\triangleright^+ = \langle \mathcal{T}^+, \mathcal{A}_\triangleright^+ \rangle$  où  $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \{N_B \sqsubseteq \neg B\}$  et  $\mathcal{A}_\triangleright^+ = \mathcal{A}_\triangleright \cup \{(N_B(a), 1)\}$ . Il en résulte que l'assertion  $B(a)$  appartient à  $cl(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright))$  ssi :  $\text{Inc}(\mathcal{A}_\triangleright^+) > \text{Inc}(\mathcal{A}_\triangleright)$ . Soient également  $\mathcal{K}_\triangleright^{+R} = \langle \mathcal{T}^{+R}, \mathcal{A}_\triangleright^{+R} \rangle$  où  $\mathcal{T}^{+R} = \mathcal{T} \cup \{N_R \sqsubseteq \neg R\}$  et  $\mathcal{A}_\triangleright^{+R} = \mathcal{A}_\triangleright \cup \{(N_R(a, b), 1)\}$ . De façon similaire, l'assertion  $R(a, b)$  appartient à  $cl(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright))$  ssi :  $\text{Inc}(\mathcal{A}_\triangleright^{+R}) > \text{Inc}(\mathcal{A}_\triangleright)$ .  $\square$

Pour aller plus loin, nous proposons une définition équivalente de la caractérisation du Lemme 1 pour des concepts (les résultats pour les rôles s'obtiennent avec un raisonnement similaire). Afin de simplifier les notations, nous notons le nouveau concept  $N_B$  comme  $N$  et l'assertion  $N_B(a)$  comme  $N(a)$ .

**Proposition 1.** Soit  $\mathcal{K}_\triangleright = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}_\triangleright \rangle$  une KB possibiliste. Soit  $Cf(\mathcal{A}_\triangleright)$  l'ensemble des conflits de  $\mathcal{A}_\triangleright$ . Une assertion  $B(a)$  appartient à  $cl(\mathcal{R}_\pi(\mathcal{A}_\triangleright))$  ssi :

$$\forall C \in Cf(\mathcal{A}_\triangleright), \exists (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{A}_\triangleright, \alpha_j \in ]0, 1], t.q. :$$

(i) les assertions  $\varphi_j$  et  $N(a)$  sont en conflit (par rapport à  $\mathcal{T}^+$ ), et

(ii)  $\alpha_j > \min\{\alpha_i : (\varphi_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}\}$ .

*Démonstration.*

Soit  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+)$  l'ensemble des conflits de  $\mathcal{A}_{>}^+$ . Chaque conflit  $\mathcal{C}_{ij} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+)$  est une paire  $\mathcal{C}_{ij} = \{(\varphi_i, \alpha_i), (\varphi_j, \alpha_j)\}$ . L'ensemble  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+)$  est composé des conflits de  $\mathcal{A}_{>}$  avec ceux qui sont induits par l'ajout de l'assertion pondérée  $(N(a), 1)$  à  $\mathcal{A}_{>}$ . Donc :

$$\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+) = \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}) \cup \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) \quad (1)$$

où :  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+)$  et  $(N(a), 1) \in \mathcal{C}\}$  est l'ensemble de tous les conflits contenant  $(N(a), 1)$ .

Nous développons l'équation 1 en appliquant la Définition 2 à  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+)$ . Nous obtenons :  $\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}^+) = \max$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>})} \{\min\{\alpha_i \mid (\varphi_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}\}\}, \\ \max_{\mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))} \{\min\{\alpha_j \mid (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{C}\}\} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Rappelons aussi que d'après la Définition 2 :

$$\max_{\mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>})} \{\min\{\alpha_i \mid (\varphi_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}\}\} = \text{Inc}(\mathcal{A}_{>}).$$

Notons que tout conflit de  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))$  est de la forme  $\{(N(a), 1), (\varphi_j, \alpha_j)\}$ . Notons par :  $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) = \{(\varphi, \alpha) \mid \exists \mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))$  t.q.  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{C}$  et  $\varphi \neq N(a)\}$ , l'ensemble des assertions en conflit avec l'assertion pondérée  $(N(a), 1)$  par rapport à  $\mathcal{T}^+$ .

Puisque le poids de l'assertion  $N(a)$  est le plus élevé possible, et le poids de toute autre assertion est dans l'intervalle  $]0, 1]$ , ceci implique :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))} \{\min\{\alpha_j \mid (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{C}\}\} \\ & = \max\{\alpha_j : (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))\} \end{aligned}$$

L'équation 2 peut être simplifiée comme suit :

$$\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}^+) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{Inc}(\mathcal{A}_{>}), \max\{\alpha_j \mid \\ (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))\} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Nous réécrivons le Lemme 1 avec l'équation 3, à savoir  $\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}^+) > \text{Inc}(\mathcal{A}_{>})$ . Nous obtenons :

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \text{Inc}(\mathcal{A}_{>}), \max\{\alpha_j \mid \\ (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))\} \end{array} \right\} > \text{Inc}(\mathcal{A}_{>}) \quad (4)$$

En utilisant la Définition 2, l'équation 4 est équivalente à :

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \alpha_j \mid (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) \\ \max_{\mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>})} \{\min\{\alpha_i \mid (\varphi_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}\}\} \end{array} \right\} > \quad (5)$$

Donc, l'équation 5 est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \forall \mathcal{C} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}), \exists (\varphi_j, \alpha_j) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) \\ & \text{t.q. } \alpha_j > \min\{\alpha_i : (\varphi_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vu que  $\mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))$  est l'ensemble des assertions qui sont en conflit avec  $(N(a), 1)$ , nous avons prouvé la proposition.  $\square$

**Exemple 3.** Nous continuons l'Exemple 1. Considérons un nouveau concept  $N$  n'apparaissant pas dans  $\mathcal{T}$ . Soit  $\mathcal{K}_{>}^+ = \langle \mathcal{T}^+, \mathcal{A}_{>}^+ \rangle$ , où  $\mathcal{T}^+ = \{A \sqsubseteq \neg D, C \sqsubseteq \neg D, D \sqsubseteq B, N \sqsubseteq \neg B\}$ ,

$$\mathcal{A}_{>}^+ = \left\{ \begin{array}{l} (N(a), 1), (A(a), 0.9), (C(b), 0.9), \\ (A(b), 0.8), (B(a), 0.8), (C(a), 0.7), \\ (B(b), 0.6), (D(b), 0.5), (D(a), 0.4) \end{array} \right\}$$

L'ensemble des conflits de  $\mathcal{A}_{>}^+$  est donné par :

$$\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+) = \left\{ \begin{array}{l} \{(N(a), 1), (B(a), 0.8)\}, \\ \{(N(a), 1), (D(a), 0.4)\}, \\ \{(A(a), 0.9), (D(a), 0.4)\}, \\ \{(C(a), 0.7), (D(a), 0.4)\}, \\ \{(A(b), 0.8), (D(b), 0.5)\}, \\ \{(C(b), 0.9), (D(b), 0.5)\} \end{array} \right\}$$

En appliquant la Définition 2 sur l'ensemble des conflits  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+)$ , on obtient  $\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}^+)$  par :

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \min\{1, 0.8\}, \min\{1, 0.4\}, \\ \min\{0.9, 0.4\}, \min\{0.7, 0.4\}, \\ \min\{0.8, 0.5\}, \min\{0.9, 0.5\} \end{array} \right\}$$

Donc,  $\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}^+) = 0.8$ .

Rappelons que  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{>})$  est donné dans l'Exemple 1. Alors :

$\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+) = \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}) \cup \text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))$ , où :

$$\text{Cf}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) = \left\{ \begin{array}{l} \{(N(a), 1), (B(a), 0.8)\}, \\ \{(N(a), 1), (D(a), 0.4)\} \end{array} \right\}$$

et tel que :

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a)) = \{(B(a), 0.8), (D(a), 0.4)\}.$$

On calcule le degré d'inconsistance de  $\mathcal{A}_{>}^+$  en utilisant l'équation 3 et on obtient le même résultat :

$$\text{Inc}(\mathcal{A}_{>}^+) = \max\{0.5, \max\{0.8, 0.4\}\} = 0.8.$$

On peut facilement vérifier que  $(B(a), 0.8) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{>}^+, N(a))$  satisfait l'équation 6.  $\square$

Grâce à ces caractérisations, nous pouvons montrer que le calcul de  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$  est traitable.

### 4.3 Traitabilité de $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$

Nous présentons les derniers résultats de cet article qui concernent la traitabilité de la réparation fermée partielle possibiliste. Notre objectif est de montrer que :

$c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright}) = \bigcap_{\mathcal{A}_{>}} \{cl(\mathcal{R}_{\pi}(\mathcal{A}_{>})) \mid \mathcal{A}_{>} \text{ est une base compatible de } \triangleright\}$  est traitable.

Ceci est récapitulé dans les deux propositions de cette section :

- La Proposition 2 énonce les conditions pour qu'une assertion appartienne à  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ .
- La Proposition 3 établit la consistance et la traitabilité de  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ .

L'idée principale est de parcourir toutes les instances possibles des concepts et des rôles, et de vérifier s'ils appartiennent à  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$  ou pas. Soit  $B$  (resp.  $R$ ) un concept (resp. un rôle). Soit  $a$  (resp.  $(a, b)$ ) un individu (resp. une paire d'individus). Nous recherchons une méthode traitable pour vérifier si  $B(a)$  (resp.  $R(a, b)$ ) appartient à  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ . Si une telle méthode existe, alors nous avons aussi un algorithme traitable pour calculer  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ . Sur la base des propriétés données dans les sections précédentes, nous pouvons présenter les principaux résultats, résumés dans les deux propositions suivantes :

**Proposition 2.** Soit  $B$  un concept. Soit  $a$  un individu. Soit  $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \{N \sqsubseteq \neg B\}$  et  $N$  un nouveau concept. Alors :

$B(a) \in c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$  ssi

$\forall \mathcal{C} = \{(\varphi_1, u_1), (\varphi_2, u_2)\} \in \text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright}), \exists (\varphi, u) \in \mathcal{A}_{\triangleright}$  tel que :

(i) les assertions  $\varphi$  et  $N(a)$  sont en conflit (par rapport à  $\mathcal{T}^+$ ) et

(ii)  $u \triangleright u_1$  ou  $u \triangleright u_2$ .

(Le résultat est valable aussi pour les rôles).

**Exemple 4.** Poursuivons l'Exemple 2 où la TBox est  $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \neg D, B \sqsubseteq \neg C, A \sqsubseteq F, B \sqsubseteq F\}$  et la ABox est  $\mathcal{A}_{\triangleright} = \{(A(a), u_1), (B(a), u_2), (C(a), u_3), (D(a), u_4), (E(a), u_5)\}$ , et l'ordre partiel  $\triangleright$  est tel que :  $u_5 \triangleright u_1 \triangleright u_3$  et  $u_5 \triangleright u_2 \triangleright u_4$ . Nous avons déjà montré que l'ensemble des conflits est :  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright}) = \{(A(a), u_1), (D(a), u_4)\}, \{(B(a), u_2), (C(a), u_3)\}$ .

et la réparation fermée possibiliste est :

$$c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright}) = \{E(a), F(a)\}.$$

La Proposition 2 permet de confirmer que  $F(a)$  est bien dans  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ . Rappelons que  $N(a)$  est la nouvelle assertion ajoutée à  $\mathcal{A}_{\triangleright}$  ainsi que le nouvel axiome négatif  $F \sqsubseteq \neg N$  ajouté à  $\mathcal{T}$  pour exprimer le fait que l'assertion  $F(a)$  est fausse. Il y a deux assertions qui contredisent  $N(a)$  (par rapport à  $\mathcal{T}^+$ ), qui sont  $\mathcal{S}(N(a)) = \{(A(a), u_1), (B(a), u_2)\}$ .

Maintenant, on peut vérifier que la condition donnée dans la Proposition 2 est satisfaite. En effet, pour le conflit  $\{(A(a), u_1), (D(a), u_4)\}$ , il est suffisant de considérer l'assertion  $(B(a), u_2)$  puisque  $u_2 \triangleright u_4$ . De la même façon, pour le conflit  $\{(B(a), u_2), (C(a), u_3)\}$ , on peut considérer l'assertion  $(A(a), u_1)$  puisque  $u_1 \triangleright u_3$ . Puisque pour les deux conflits de  $\text{Cf}(\mathcal{A}_{\triangleright})$ , la condition donnée dans la Proposition 2 est vérifiée, nous concluons, comme prévu, que  $F(a) \in c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ .  $\square$

La Proposition 2 établit une condition pour qu'une assertion appartienne à  $c\pi(\mathcal{A}_{\triangleright})$ . Le dernier résultat de cet article montre que cette

condition peut être vérifiée en un temps polynomial, donc le calcul de la réparation  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  est traitable. Comme attendu, la Proposition 3 établit également que la réparation  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  est consistante et plus productive que la réparation  $\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ . Formellement :

**Proposition 3.**

1.  $\langle \mathcal{T}, c\pi(\mathcal{A}_\triangleright) \rangle$  est consistant.
2.  $\pi(\mathcal{A}_\triangleright) \subseteq c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  et  $cl(\pi(\mathcal{A}_\triangleright)) \subseteq c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$ .  
Le contraire des deux inclusions est faux.
3. Calculer  $c\pi(\mathcal{A}_\triangleright)$  est dans P.

## 5 Conclusion

Nous avons abordé le problème de la gestion des incohérences dans les ontologies partiellement pré-ordonnées, spécifiées en langage DL-Lite $\mathcal{R}$ , dans le cadre de la théorie des possibilités. Nous avons proposé une nouvelle méthode, traitable et saine, obtenue de l’intersection des réparations possibilistes fermées associées à chacune des bases compatibles. Ces dernières sont totalement ordonnées et correspondent aux extensions de l’ordre partiel sur les assertions. Nous avons augmenté la productivité de la réparation sans augmenter la complexité. Dans des travaux futurs, nous envisageons d’étendre cette méthodes à des logiques de description plus expressives que les fragments DL-Lite $\mathcal{R}$ , tout en préservant des propriétés calculatoires favorables.

**Remerciements :** Ce travail est financé par le projet ANR-21-CE23-0004 CROQUIS (Collecting, Representing, cOmpleting, merging, and Querying heterogeneous and Uncertain waStewater and stormwater network data).

## Références

[1] A. Artale, D. Calvanese, R. Kontchakov, and M. Zakharyashev. The DL-Lite family and relations. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 36 :1–69, 2009.

[2] Jean-François Baget, Salem Benferhat, Zied Bouraoui, Madalina Croitoru, Marie-

Laure Mugnier, Odile Papini, Swan Rocher, and Karim Tabia. Inconsistency-tolerant query answering : Rationality properties and computational complexity analysis. In *European Conference Logics in Artificial Intelligence, JELIA*, volume 10021 of *LNCS*, pages 64–80, 2016.

[3] Sihem Belabbes and Salem Benferhat. Ontologies légères inconsistantes partiellement pré-ordonnées en théorie des possibilités. In *Conférence Nationale en Intelligence Artificielle, CNIA*, pages 6–13, 2020.

[4] Sihem Belabbes and Salem Benferhat. Computing a possibility theory repair for partially preordered inconsistent ontologies. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pages 1–10, 2021.

[5] Sihem Belabbes and Salem Benferhat. Characterizing the possibilistic repair for inconsistent partially ordered assertions. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems - 19th International Conference, IPMU 2022, Milan, Italy, Proceedings, Part II*, volume 1602, pages 652–666, 2022.

[6] S. Benferhat, Z. Bouraoui, and K. Tabia. How to select one preferred assertional-based repair from inconsistent and prioritized DL-Lite knowledge bases? In *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 1450–1456, 2015.

[7] Salem Benferhat and Zied Bouraoui. Min-based possibilistic DL-Lite. *Journal of Logic and Computation*, 27(1) :261–297, 2017.

[8] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo, Domenico Lembo, Maurizio Lenzerini, and Riccardo Rosati. Tractable reasoning and efficient query answering in description logics : The DL-Lite family. *Journal of Automated Reasoning*, 39(3) :385–429, 2007.

[9] D. Lembo, M. Lenzerini, R. Rosati, M. Ruzzi, and D. Fabio Savo. Inconsistency-tolerant semantics for description logics. In *Web Reasoning and Rule Systems, RR*, pages 103–117, 2010.