

# COHOMOLOGIE D'INTERSECTION MODEREE

## UN THEOREME DE DERHAM

Bohumil Cenk, Gilbert Hector et Martin Saralegi<sup>1</sup>

### Abstract

With a singular space  $K$  there is associated a differential graded module of polynomial differential forms  $IT_{\bar{p}}^{*,*}(K)$  together with a filtration  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) \subset IT_{\bar{p}}^{*,q+1}(K)$  in each degree  $*$ .  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  is a graded module over the subring of the rationals  $Q_q = Z[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{q}]$ . These modules are defined for any stratified pseudomanifold  $K$  and for any perversity  $\bar{p}$ . It is proved that the cohomology of such a differential module  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  is isomorphic to the intersection cohomology  $IH_{\bar{p}}^*(K; Q_q)$ . The construction of  $IT_{\bar{p}}^{*,*}(K)$  is based on the deRham complex of Cenk and Porter when applied to a desingularization of  $K$ .

En se basant sur le travail de Sullivan [18], Cenk et Porter [5] on construit pour tout complexe simplicial  $C$  un complexe de formes différentielles qui calcule la cohomologie modérée (et en particulier, entière) de  $C$ . Ceci leur a permis de généraliser la théorie des modèles minimaux de Sullivan aux coefficients dans un système d'anneaux. Le développement de la théorie des modèles minimaux dans le cadre modéré permet, non seulement d'obtenir des renseignements sur la torsion de la cohomologie, mais encore d'étendre la dite théorie au cas "infiniment engendré" (cf. [16]).

---

*Classification AMS.* Primaire 55N35. Secondaire 57N80.

*Mots clés.* Cohomologie modérée, cohomologie d'interseion, pseudovariété stratifiée.

<sup>1</sup>Allocation de recherche et Projet PB91-0142 du DGICYT-Espagne.

D'autre part, l'homologie d'intersection a été introduite par Goresky et MacPherson [9] pour étendre la dualité de Poincaré aux variétés singulières. Cette homologie partage plusieurs propriétés avec l'homologie singulière: description axiomatique [10], théorie de Morse [11], cobordisme [12], Théorème de Lefschetz [8], Théorème de deRham [1], [2], [15] . . . . Elle coïncide avec l'homologie ordinaire pour les variétés lisses, compactes et orientées. L'homologie d'intersection a été définie en première instance dans la catégorie linéaire par morceaux [9] (pseudovariétés stratifiées); elle s'étend naturellement aux complexes simpliciaux à l'aide d'une triangulation en drapeaux [13, Appendice] (pseudovariétés stratifiées simpliciales), cadre où se développe [5].

Le but de ce travail est d'établir un Théorème de deRham qui englobe les deux points de vue précédents: un Théorème de deRham pour l'homologie d'intersection modérée dans la catégorie des pseudovariétés stratifiées simpliciales. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant (cf. Théorème 5.2.1):

**Théorème.** *Soit  $K$  une pseudovariété stratifiée simpliciale. Fixons  $\bar{p}$  une perversité et  $q$  un entier. Le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  des formes différentielles d'intersection modérées calcule la cohomologie d'intersection  $IH_{\bar{p}}^*(K; Q_q)$ . L'isomorphisme*

$$(1) \quad H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)) \cong IH_{\bar{p}}^*(K; Q_q)$$

*est induit par l'intégration habituelle  $\int$  des formes différentielles sur des simplexes.*

*Historique.* La première version à la de deRham de la cohomologie d'intersection de  $K$  nous la trouvons dans le travail de Cheeger [6]. Les formes différentielles d'intersection sont celles de carré intégrable, pour une certaine métrique riemannienne sur la partie régulière de  $K$ . En fait, Brasselet, Goresky et MacPherson ont établi dans [1] un lien direct entre la condition de permissibilité au niveau des chaînes de [9] et la condition de permissibilité au niveau des formes de [6]. Remarquons que le système des coefficients est celui des coefficients réels.

Dans le cadre des espaces stratifiés, la notion de forme différentielle d'intersection est due à Goresky et MacPherson [3]. Pour exprimer la condition de permissibilité des formes on utilise un système de voisinages tubulaires des strates singulières. Un autre point de vue est celui de [15], où pour mesurer la

permissibilité des formes on fait appel à un éclatement de l'espace stratifié en question. Ici, à différence des approches précédents, le Théorème de deRham obtenu utilise l'intégration habituelle  $\int$  des formes sur des simplexes.

Dans notre travail nous avons choisi ce dernier point de vue. La notion d'éclatement s'étend naturellement au cadre simplicial et c'est cet outil qui va nous permettre de travailler à coefficients modérés (en éclatant les formes) et d'établir l'isomorphisme (1) par l'intermédiaire de de l'intégration  $\int$ . Le chemin que nous suivons pour établir le Théorème de deRham est parallèle à celui utilisé dans le cas non stratifié. Mais, pour y arriver, il y a un certain nombre de difficultés techniques, liées à la nature des stratifications, que nous devons surmonter. Les deux principales sont les suivantes.

- *Choix de la triangulation.* Une triangulation en drapeaux, qui fixe la structure simpliciale de  $K$ , n'est pas assez fine pour établir le Théorème de deRham que nous cherchons. On doit faire attention au phénomène suivant.

Un point clé dans la démarche de [5] est la filtration du complexe simplicial  $C$  par une suite décroissante de sous-complexes simpliciaux

$$C = C^n \supset C^{n-1} \supset C^{n-2} \supset \dots$$

(les squelettes), dont les complexes relatifs  $(C^i, C^{i-1})$  sont décrits en fonction des  $i$ -simplexes de  $C$ . Ces simplexes décrivent la structure locale de  $C$ , car  $C$  est acyclique. Mais la structure locale d'une pseudovariété stratifiée  $K$  n'est pas décrite simplement par les simplexes ( $K$  n'est pas acyclique pour l'homologie d'intersection). Localement, nous trouvons des joints de la forme  $\alpha * L_\alpha$ , où  $\alpha$  est un simplexe maximal d'une strate et  $L_\alpha$  est l'entrelac de  $\alpha$ . Ainsi la triangulation fixée sur  $K$  doit tenir compte de ce fait.

Nous avons donc besoin de définir sur  $K$  une filtration  $\mathcal{F}$  dont les complexes relatifs soient déterminés par les joints  $\alpha * L_\alpha$ . C'est chose faite avec le complexe résiduel  $\mathcal{L}(K)$  de  $K$  que nous introduisons dans ce travail:  $\mathcal{L}(K)$  est le sous-complexe de  $K$  déterminé par les simplexes qui rencontrent la dernière strate de  $K$  en codimension strictement positive. Nous avons ainsi sur  $K$  la filtration  $\mathcal{F}$

$$K \supset \mathcal{L}(K) \supset \mathcal{L}^2(K) \supset \mathcal{L}^3(K) \supset \dots$$

Malheureusement le complexe  $\mathcal{L}(K)$  n'est pas une pseudovariété stratifiée simpliciale. Pour cette raison nous introduisons la catégorie des complexes stratifiés, où l'opérateur  $\mathcal{L}$  est interne. Un complexe stratifié est la donnée d'un complexe simplicial  $K$  et d'une filtration de  $K$  par des sous-complexes simpliciaux fermés

$$K = K_n \supset K_{n-1} = K_{n-2} = \Sigma \supset K_{n-3} \supset \cdots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset,$$

où pour chaque  $\sigma \in K_i$  il existe  $\tau \in K_i$  de dimension  $i$  avec:

$$\sigma < \tau, \sigma \cap K_{i-1} < \sigma \text{ et } \sigma \cap K_{i-1} = \tau \cap K_{i-1}.$$

(Ici,  $<$  dénote "face de"). Cette condition demande une certaine homogénéité de chaque plongement simplicial  $K_{i-1} \subset K_i$ . Remarquons que la triangulation sous-jacente est en drapeaux.

Nous prouvons que toute pseudovariété stratifiée  $K$  possède une triangulation qui fait de  $K$  un complexe stratifié. La notion de complexe stratifié est d'ailleurs strictement plus fine que celle de pseudovariété stratifiée simpliciale.

Remarquons que chaque  $K_i$ , avec  $K_i \neq K_{i-1}$ , n'est pas une variété simpliciale de dimension  $i$  mais un complexe simplicial de dimension  $i$ . Cette approche surprend d'un point de vue purement "homologie d'intersection" où les strates sont des variétés. Mais elle est naturelle si nous nous plaçons dans le cadre simplicial de [5]; là, le Théorème de deRham est montré pour les complexes simpliciaux et non seulement pour les variétés simpliciales. La définition d'homologie d'intersection s'étend naturellement aux complexes stratifiés; bien sûr, certaines propriétés de l'homologie d'intersection disparaissent dans le passage pseudovariétés stratifiées - complexes stratifiés, nous pensons notamment à l'indépendance de la stratification. Rétablir les propriétés basiques de l'homologie d'intersection dans ce nouveau cadre des complexes stratifiés demande du travail supplémentaire.

- *Intégration*  $\int$ . Toutes les formes différentielles d'intersection que l'on rencontre dans la littérature sont définies sur la partie régulière de  $K$ , ce qui empêche a priori l'intégration habituelle des formes sur des simplexes et donc le Théorème de deRham que nous cherchons. Pour palier à ça nous introduisons la notion d'éclatement. L'éclaté  $\widetilde{K}$  est obtenu à partir de  $K$  en remplaçant chaque point singulier  $A$  de  $K$  par son entrelac  $L_A$ . En collapsant chaque  $L_A$  sur  $A$  nous obtenons l'éclatement  $\mu_K: \widetilde{K} \rightarrow K$ .

Considérons par exemple le simplexe standard  $\Delta$  de dimension 2, de sommets  $A_0, A_1$  et  $A_2$  dont le lieu singulier soit  $\{A_0\}$ . L'éclatement de  $\Delta$  est l'application:  $\mu : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Delta$  définie par  $\mu(t, s) = tA_0 + (1-t)sA_1 + (1-t)(1-s)A_2$ . Pour définir le complexe des formes différentielles d'intersection modérées nous procédons en deux étapes.

1. Formes relevables. Une forme  $\omega$  définie sur la partie régulière de  $K$  est relevable si elle s'éclate en

une forme  $\tilde{\omega}$  de  $\tilde{K}$ . Nous sommes donc dans le cadre de [5]. Dans l'exemple précédent, la forme

$\omega_1 = \frac{t_0}{1-t_0} dt_1 + \frac{t_1 t_0}{(1-t_0)^2} dt_0$  est relevable avec  $\tilde{\omega}_1 = t ds$ , et la forme  $\omega_2 = \frac{t_1}{(1-t_0)^2} dt_1$  ne l'est pas, car  $\mu^* \omega_2 = \frac{s}{1-t} (-s dt + (1-t) ds)$ .

2. Degré vertical. Comme dans [15], la permissibilité d'une forme relevable  $\omega$  par rapport à une

strate  $K_i$  est mesurée à l'aide de l'éclatement de  $K$ . Ainsi, le degré vertical  $\|\omega\|_i$  est le degré

de  $\tilde{\omega}$  relativement aux fibres de  $\mu_K$  au dessus de  $K_i$ . Dans l'exemple précédent,  $\|\omega_1\|_0 = 1$  car

$$\tilde{\omega}_1|_{t=1} = ds.$$

Nous définissons les formes différentielles d'intersection modérées de  $K$  comme les formes relevables  $\omega$ , avec  $\tilde{\omega}$  polynomiale modérée, vérifiant la condition d'intersection:

$$\max(\|\omega\|_i, \|d\omega\|_i) \leq n - i - 2 - p_{n-i}, \text{ pour tout } i.$$

Bien que ces formes différentielles d'intersection modérées soient définies sur la partie régulière de  $K$ ,

l'intégration  $\int$  est bien définie car elle se réalise finalement sur  $\tilde{K}$ . Un certain travail est nécessaire pour

montrer qu'il est aussi un morphisme différentiel (formule de Stokes), car dans le passage  $K \mapsto \tilde{K}$  des

nouvelles faces apparaissent. En effet, si  $\omega$  est une forme de  $K$ , relevable en une forme  $\tilde{\omega}$  de  $\tilde{K}$ , et  $\xi$  est

une chaîne de  $K$ , relevable en une chaîne  $\tilde{\xi}$  de  $\tilde{K}$ , la formule de Stokes  $\int_{\xi} d\omega = \int_{\partial\xi} \omega$  devient  $\int_{\partial\tilde{\xi} - \tilde{\partial}\tilde{\xi}} \tilde{\omega} = 0$ .

Bien qu'en général  $\partial\tilde{\xi} \neq \tilde{\partial}\tilde{\xi}$ , nous montrons que si  $\omega$  et  $\xi$  sont d'intersection alors la restriction de  $\tilde{\omega}$  à  $\partial\tilde{\xi} - \tilde{\partial}\tilde{\xi}$ , s'annule.

La démonstration du fait que  $\int$  induit un isomorphisme en cohomologie est faite comme d'habitude en deux pas: d'abord localement dans chaque joint  $\alpha * L_\alpha$  et après par induction en commençant par l'élément le plus petit de la filtration  $\mathcal{F}$ .

L'organisation du travail est la suivante:

1. Complexes stratifiés.
2. Cohomologie d'intersection.
3. Eclatement.
4. Cohomologie différentielle.
5. Théorème de deRham.

Nous introduisons, dans la première section, le complexe stratifié comme une pseudovariété stratifiée avec une “bonne” triangulation. Dans la deuxième, nous étudions la cohomologie d'intersection d'un complexe stratifié. Nous définissons ensuite l'éclatement d'un complexe stratifié, ce qui nous permet d'introduire les formes d'intersection modérées dans la section 4. Dans la dernière section nous montrons le résultat principal de ce travail: la cohomologie du complexe des formes d'intersection modérées est isomorphe, par l'intégration habituelle, à la cohomologie modérée (voir [4] pour un autre point de vue). Nous terminons en discutant l'indépendance du complexe des formes cubiques d'intersection par rapport à la triangulation et la stratification choisies dans  $K$  ainsi comme en décrivant la dualité de Poincaré et la formule de Künneth en termes du produit extérieur des formes.

## 1 Complexes stratifiés

La théorie de Sullivan-Cenkli-Porter se situe dans la catégorie des complexes simpliciaux alors qu'une pseudovariété stratifiée est un objet de la catégorie PL (voir [9] pour la définition précise). Il s'avère donc nécessaire de fixer une triangulation (structure de complexe simplicial) dans chaque pseudovariété stratifiée. Nous faisons ceci de façon à préserver la structure locale des pseudovariétés stratifiées. La triangulation en drapeaux de [13] n'est pas assez fine. Nous introduisons dans cette section la notion de complexe stratifié, qui, elle, rend compte de la structure locale de la pseudovariété stratifiée. Pour les notions relatées aux complexes simpliciaux nous nous référons à [14].

## 1.1 Complexes stratifiés

Nous commençons en rappelant la définition de complexe cellulaire, notion qui englobe tous les complexes qui apparaîtront dans ce travail: complexes simpliciaux, complexes cubiques, complexes prismatiques, .... Ensuite nous introduisons les complexes stratifiés en deux temps: complexes filtrés et complexes stratifiés proprement dits.

**1.1.1** Une **cellule** est un polyèdre compact et convexe. Un **complexe cellulaire**  $K$  est une famille finie de cellules, vérifiant les conditions suivantes:

$$(2) \quad \tau \in K, \sigma < \tau \Rightarrow \sigma \in K \quad \text{et}$$

$$(3) \quad \tau, \sigma \in K \Rightarrow \tau \cap \sigma < \tau, \tau \cap \sigma < \sigma.$$

Si pour un certain entier  $n$  on a:

$$(4) \quad \sigma \in K \Rightarrow \text{il existe } \tau \in K \text{ de dimension } n \text{ avec } \sigma < \tau,$$

on dira que  $K$  est de **dimension**  $n$  et on écrira  $n = \dim K$ .

Par cohérence de notation on dira que l'ensemble vide est un complexe cellulaire de dimension  $-1$ . Toute sous-famille  $X \subset K$  vérifiant (1) et (2) sera dite **sous-complexe cellulaire** de  $K$ . On posera  $\text{codim}_K X$  la codimension de  $X$  dans  $K$ . Dans ce travail on fera l'abus de notation suivant: avec  $\sigma$  on désignera également une cellule de  $K$  et le complexe cellulaire déterminé par ses faces.

Dans la suite nous trouverons principalement les complexes suivants:

- **Complexes simpliciaux.** Si les cellules sont des simplexes.
- **Complexes cubiques.** Si les cellules sont des cubes.

Et plus généralement les

- **Complexes prismatiques.** Si les cellules sont des **prismes**, où un prisme est un produit fini de simplexes. Nous considérerons toujours les coordonnées locales données par les coordonnées barycentriques des simplexes.

Une flèche  $f : K \rightarrow K'$  entre deux complexes cellulaires est **cellulaire** si elle envoie les cellules de  $K$  sur les cellules de  $K'$  et de façon différentiable. Nous dirons que  $f$  est un **isomorphisme** s'il est cellulaire et si sa restriction à chaque cellule de  $K$  est un isomorphisme linéaire.

**1.1.2** La première caractéristique d'une pseudovariété stratifiée est l'existence d'un lieu singulier stratifié. Nous transposons ceci au cas des complexes simpliciaux.

Une **filtration simpliciale** sur un complexe simplicial  $K$  de dimension  $n$  est une filtration de  $K$  par des sous-complexes simpliciaux

$$K = K_n \supset K_{n-1} \supset K_{n-2} \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset,$$

où pour chaque  $i \in \{0, \dots, n\}$ :

$$(5) \quad \sigma \in K \Rightarrow \sigma \cap K_i < \sigma, \text{ et}$$

$$(6) \quad \dim K_i = i, \text{ si } K_i \neq K_{i-1}.$$

La première propriété équivaut à dire que la triangulation de  $K$  est en drapeaux. La deuxième propriété sort  $K$  du cadre de [13] ( $K_i - K_{i-1}$  n'est pas ici forcément une variété), mais elle est plus naturelle dans la catégorie des complexes stratifiés, n'oublions que le Théorème de de Rham de [5] a été prouvé pour les complexes simpliciaux et pas seulement pour les variétés simpliciales.

Remarquons que  $K_n$  est nécessairement différent de  $K_{n-1}$ . Par la suite on désignera par  $K_m$  le plus petit élément non vide de la filtration, c'est-à-dire  $K_m \neq K_{m-1} = \emptyset$ ; nous dirons que  $m$  est le **degré minimal** de  $K$ . La **longueur** de  $K$ , notée  $long(K)$ , est la somme de  $m$  et du nombre d'indices  $i$  pour lesquels  $K_i \neq K_{i-1}$ .

Un **complexe filtré** est la donnée d'un complexe simplicial  $K$  et d'une filtration simpliciale. Soit  $Y$  un sous-complexe de  $K$ . Nous dirons que  $Y$  est un **sous-complexe filtré** si la filtration induite

$$Y = Y \cap K_n \supset Y \cap K_{n-1} \supset \dots \supset Y \cap K_0 \supset Y \cap K_{-1} = \emptyset$$

définit une structure de complexe filtré sur  $Y$ .

**1.1.3** Les propriétés locales d'un complexe filtré peuvent être améliorées après une subdivision convenable.

Ceci donne lieu à la notion de complexe stratifié.

Une filtration simpliciale est une **bonne filtration simpliciale** si pour chaque  $\sigma \in K_i$  avec  $K_i \neq K_{i-1}$ , il existe  $\tau \in K_i$  de dimension  $i$  avec:

$$(7) \quad \sigma < \tau \text{ et } \sigma \cap K_{i-1} = \tau \cap K_{i-1}.$$

Cette condition demande une certaine homogénéité de l'inclusion  $K_{i-1} \subset K_i$ .

Un **complexe stratifié** est la donnée d'un complexe simplicial  $K$  et d'une bonne filtration simpliciale vérifiant

$$(8) \quad K_{n-1} = K_{n-2}.$$

Le sous-complexe  $\Sigma = K_{n-1}$  est la **partie singulière** de  $K$  [9]. Un sous-complexe filtré  $Y$  de  $K$  est un **sous-complexe stratifié** si la filtration induite définit une structure de complexe stratifié sur  $Y$ .

Comme on l'avait annoncé au début de ce travail:

**Proposition 1.1.4** *Toute pseudovariété stratifiée possède une triangulation qui en fait un complexe stratifié.*

**Démonstration.** Voir Section (1.3)



## 1.2 Décomposition d'un complexe stratifié $K$

Nous présentons dans cette section la décomposition d'un complexe stratifié  $K$ , qui joue un rôle analogue à celui de la décomposition par squelettes utilisée à [5]. Nous commençons par présenter les "morceaux".

**1.2.1** Pour chaque complexe filtré  $K$  et chaque simplexe  $\alpha \in K_i - K_{i-1}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , l'**entrelac transversal** de  $\alpha$  est le complexe simplicial

$$L_\alpha = \{\beta \in K / \alpha * \beta \in K \text{ et } \beta \cap K_i = \emptyset\}.$$

Rappelons que  $\alpha * \beta$  est le plus petit simplexe de  $K$  contenant  $\alpha$  et  $\beta$ ; il est naturellement identifié avec  $\{ta + (1-t)b / a \in \alpha, b \in \beta \text{ et } t \in [0, 1]\}$ .

Le **complexe résiduel** du complexe filtré  $K$  est le complexe simplicial

$$\mathcal{L}(K) = \{\tau \in K / \dim(\tau \cap K_m) < m\},$$

c'est-à-dire, la famille des simplexes de  $K$  qui rencontrent le complexe  $K_m$  dans le squelette de codimension un. Les exemples de la page 11 illustrent ces notions.

Ces espaces jouissent des propriétés suivantes.

**Proposition 1.2.2** *Soit  $K$  un complexe stratifié. Le complexe résiduel  $\mathcal{L}(K)$  et chaque entre-lac transversal  $L_\alpha$  sont des sous-complexes stratifiés de  $K$ . Ils vérifient*

- a)  $\dim(\mathcal{L}(K) \cap K_m) = m - 1$ ,
- b)  $\dim(\mathcal{L}(K) \cap K_i) = i$ , si  $i \neq m$  et  $\mathcal{L}(K) \cap K_i \neq \mathcal{L}(K) \cap K_{i-1}$ ,
- c)  $\dim(L_\alpha \cap K_i) = i - \dim \alpha - 1$ , si  $L_\alpha \cap K_i \neq L_\alpha \cap K_{i-1}$ ,
- d)  $\text{long}(\mathcal{L}(K)) < \text{long}(K)$  et  $\text{long}(L_\alpha) < \text{long}(K)$ .

**Démonstration** Considérons d'abord le complexe résiduel  $\mathcal{L}(K)$ . Distinguons deux cas. Si  $m = n$  alors  $\mathcal{L}(K)$  est le squelette de codimension un de  $K$  et le résultat est immédiat. Supposons  $m < n$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{L}(K)$  vérifie (2) et (3). Vérifions (7), ce qui implique (4) et (6). Soit  $\sigma \in \mathcal{L}(K) \cap K_i$  avec  $\mathcal{L}(K) \cap K_i \neq \mathcal{L}(K) \cap K_{i-1}$ .

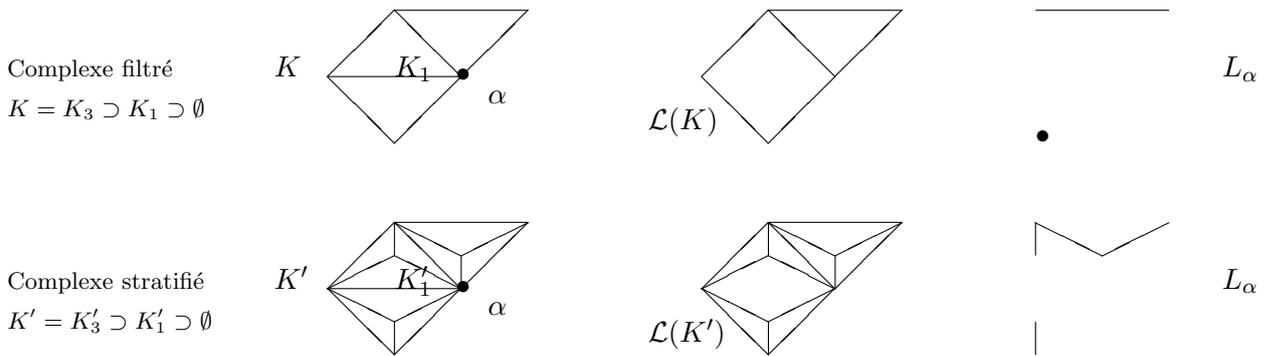
Si  $i = m$ , degré minimal, le résultat est immédiat car  $\mathcal{L}(K) \cap K_m$  est un complexe stratifié de dimension  $m - 1$  (le squelette de codimension un de  $K_m$ ).

Supposons  $i > m$ . Puisque  $K_i$  vérifie (7), il existe  $\tau \in K_i$  de dimension  $i$ , avec  $\sigma < \tau$  et  $\sigma \cap K_{i-1} = \tau \cap K_{i-1}$ . Il suffira donc de montrer que  $\tau$  est un élément de  $\mathcal{L}(K)$ . Pour cela rappelons l'inclusion  $K_m \subset K_{i-1}$ , qui implique:  $\tau \cap K_m = (\tau \cap K_{i-1}) \cap K_m = (\sigma \cap K_{i-1}) \cap K_m = \sigma \cap K_m$ , et donc  $\tau \in \mathcal{L}(K)$ . Puisque (5) et (8) découlent des propriétés analogues pour  $K$ , nous en déduisons que  $\mathcal{L}(K)$  est un complexe stratifié. Les calculs précédents montrent aussi les propriétés a) et b). Finalement, l'inégalité  $\text{long}(\mathcal{L}(K)) < \text{long}(K)$  provient du fait que la dimension de  $\mathcal{L}(K) \cap K_m$  est  $m - 1$ .

La démarche de la démonstration est analogue pour un entrelac transversal  $L_\alpha$ , où  $\alpha \in K_j - K_{j-1}$ . Montrons (1.3.2) et d). Soit  $\sigma \in L_\alpha \cap K_i$  avec  $L_\alpha \cap K_i \neq L_\alpha \cap K_{i-1}$ . Remarquons l'inégalité  $i \geq j + 1$ . Ainsi  $\alpha * \gamma \in K_i$  et il existe donc  $\gamma \in K_i$  de dimension  $i$  avec  $\alpha * \sigma < \gamma$  et  $\gamma \cap K_{i-1} = (\alpha * \sigma) \cap K_{i-1}$ . Puisque  $K_j \subset K_{i-1}$  on a  $\alpha = \gamma \cap K_j$  et ainsi  $\gamma = \alpha * \tau$ , pour un certain simplexe  $\tau$  avec  $\tau \cap K_j = \emptyset$ . Nous pouvons donc affirmer que  $\tau$  est un simplexe de  $L_\alpha \cap K_i$  de dimension  $i - \dim \alpha - 1$ , avec  $\sigma < \tau$  et  $\sigma \cap K_{i-1} = \tau \cap K_{i-1}$ . L'inégalité  $long(L_\alpha) < long(K)$  provient du fait  $L_\alpha \cap K_j = \emptyset$ . ♣

**1.2.3** Ces deux types de complexes sont un cas particulier d'une notion plus générale utilisée au long de ce travail. Nous dirons que'un sous-complexe  $Y$  d'un complexe stratifié  $N$  est **transversal** (resp.  **$\mathcal{L}$ -transversal**) si, pour le cas  $Y \cap N_i \neq Y \cap N_{i-1}$  (resp.  $Y \cap N_i \neq Y \cap N_{i-1}$  et  $i$  différent du degré minimal), on a  $codim_Y(Y \cap N_i) = codim_N(N_i)$ ; c'est-à-dire, si  $Y$  et  $N_i$  se rencontrent en position générale. Par conséquent, l'entrelac transversal est un sous-complexe transversal et le complexe résiduel est un sous-complexe  $\mathcal{L}$ -transversal.

L'exemple suivant montre que, si  $K$  est seulement un complexe filtré, le complexe résiduel et les entrelacs transversaux peuvent ne pas être de complexes filtrés. Après une sous-division convenable le complexe filtré devient stratifié ainsi que le complexe résiduel et les entrelacs transversaux.



**1.2.4 Joint.** Soit  $\Delta$  un complexe simplicial de dimension  $\ell$ . Le **joint**  $\Delta * K$  est le quotient  $\Delta \times K \times [0, 1]$  par la relation

$$(x_1, x_2, 0) \sim (x'_1, x_2, 0) \text{ et } (x_1, x_2, 1) \sim (x_1, x'_2, 1).$$

Dans le cas particulier où  $\Delta$  est un point, on obtient le **cône**  $cK$ . Le joint  $\Delta * K$  possède une structure naturelle de complexe simplicial de dimension  $\ell + n + 1$ :  $\{\alpha * \beta / \alpha \in \Delta, \beta \in K\}$  (cf. [14, pag.23]). Il a

aussi une structure naturelle de complexe filtré, donnée par la filtration:

$$\Delta * K = \Delta * K_n \supset \Delta * K_{n-1} \supset \Delta * K_{n-2} \supset \dots \supset \Delta * K_0 \supset \Delta \supset \emptyset.$$

Remarquons néanmoins que le joint n'est pas un complexe stratifié: considérer  $\sigma \in K$  à (7).

Le complexe résiduel du joint est donné par:  $\mathcal{L}(\Delta * K) = K$ , si  $\dim \Delta = 0$ , et  $\mathcal{L}(\Delta * K) = \Delta' * K$ , où on a écrit  $\Delta'$  le squelette de  $\Delta$  de codimension un.

**1.2.5** La comparaison entre les cohomologies d'intersection modérées simpliciale et différentielle est faite en utilisant la **décomposition** de  $K$ :

$$(9) \quad K = \mathcal{L}(K) \cup \left( \bigcup_{\alpha \in I_m} (\alpha * L_\alpha) \right)$$

où  $I_m$  est la famille des simplexes de  $K_m$  de dimension  $m$ . On vérifie aussi la relation:

$$(10) \quad \mathcal{L}(K) \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I_m} (\alpha * L_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in I_m} \mathcal{L}(\alpha * L_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I_m} (\delta\alpha * L_\alpha).$$

On remarquera que chaque  $\alpha * L_\alpha$  est un sous-complexe transversale de  $K$  (cf. (1.2.2))

### 1.3 Pseudovariétés stratifiées versus complexes stratifiés.

Dans cette section nous prouvons la Proposition 1.1.4 qui assure l'existence d'une structure de complexe stratifié sur une pseudovariété stratifiée donnée. Pour cela nous avons besoin de deux Lemmes.

**Lemme 1.3.1** *Soient  $K$  un complexe simplicial de dimension  $n$  et  $X$  un sous-complexe simplicial. Alors il existe une subdivision  $K'$  de  $K$  vérifiant:*

$$a) \quad K^{(n-1)} \subset (K')^{(n-1)} \text{ et}$$

b) *pour chaque  $\sigma \in K'$  il existe  $\tau \in K'$ , de dimension  $n$ , avec  $\sigma < \tau$  et  $\sigma \cap X = \tau \cap X$ .*

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que grâce à la condition a) on peut donc supposer que  $K$  est un simplexe et que  $X$  est une face de  $K$ . Soient  $\{B_0, \dots, B_l\}$  les sommets de  $X$  et  $\{A_0, \dots, A_p, B_0, \dots, B_l\}$  les sommets de  $K$ . On notera ceci par:  $K = \langle A_0, \dots, A_p; B_0, \dots, B_l \rangle$  et  $X = \langle B_0, \dots, B_l \rangle$

Faisons la démonstration par récurrence sur  $l$ . Si  $l = -1$ , i.e.  $X = \emptyset$ , il suffit de prendre  $K' = K$ . Supposons donc le résultat démontré pour les dimensions strictement inférieures à  $l$ . Considérons la subdivision de  $K$  qui consiste à ajouter comme sommet le barycentre  $P$  de  $K$ . Dans ce nouveau complexe simplicial les simplexes de dimension  $n$  sont de deux types:

- $\varepsilon_i = \langle A_0, \dots, A_{i-1}, P, A_{i+1}, \dots, A_p; B_0, \dots, B_l \rangle$ ,  $i \in \{0, \dots, p\}$
- $\eta_j = \langle A_0, \dots, A_p, P; B_0, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_l \rangle$ ,  $j \in \{0, \dots, l\}$

Les simplexes  $\eta_0, \dots, \eta_l$  vérifient les conditions de l'hypothèse de récurrence. Il existe donc des subdivisions respectives  $S_0, \dots, S_l$  vérifiant a) et b). Posons finalement  $K' = S_0 \cup \dots \cup S_l \cup \varepsilon_0 \cup \dots \cup \varepsilon_p$ , ce qui est bien défini d'après a). Puisque chaque  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p$  vérifie a) il reste à montrer que, par exemple,  $\varepsilon_0$  vérifie b). Soit  $\sigma$  une face de  $\varepsilon_0$ . Il y a deux possibilités:

1.  $\langle B_0, \dots, B_l \rangle \subset \sigma$ . Posons  $\tau = \varepsilon_0 \in K'$ ; il est de dimension  $n$  et vérifie  $\sigma \subset \tau$  et  $\tau \cap X = \langle B_0, \dots, B_l \rangle = \sigma \cap X$ .
2. Il existe  $j \in \{0, \dots, l\}$  avec  $B_j \notin \sigma$ . Alors  $\sigma \subset \eta_j$ . Par hypothèse de récurrence il existe  $\tau \in S_j$ , de dimension  $n$ , avec  $\sigma \subset \tau$  et  $\sigma \cap X \cap \eta_j = \tau \cap X \cap \eta_j$ , c'est-à-dire,  $\sigma \cap X = \tau \cap X$ . ♣

**Lemme 1.3.2** *Pour toute filtration simpliciale  $K = K_p \supset K_{p-1} \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset$  il existe une subdivision  $K' \triangleleft K$  pour laquelle la filtration induite  $K' = K'_p \supset K'_{p-1} \supset \dots \supset K'_0 \supset K'_{-1} = \emptyset$ , est une bonne filtration simpliciale.*

**Démonstration.** Soit  $i \geq 0$  le plus grand entier pour lequel la filtration  $K_i \supset K_{i-1} \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset$  soit une bonne filtration simpliciale. Nous allons construire une subdivision  $K' \triangleleft K$  telle que la filtration induite  $K'_{i+1} \supset K'_i \supset \dots \supset K'_0 \supset K'_{-1} = \emptyset$ , soit une bonne filtration simpliciale. Une application réitérée de cet argument termine la démonstration.

Soit  $K'_{i+1} \triangleleft K_{i+1}$  la subdivision donnée par le Lemme précédent appliquée à  $X = K_i \subset K_{i+1}$ . La filtration  $K'_{i+1} \supset K_i \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset$ , est bien définie (cf. (1.3.1 a))) et c'est une bonne

filtration simpliciale (cf. (1.3.1 b))). Complétons la subdivision. D'après [14, pag.32], pour chaque  $j \in \{i+2, \dots, p\}$  il existe une subdivision  $K'_j \triangleleft K_j$  avec  $K'_{j-1} \subset K'_j$ . Il suffit de considérer  $K' = K'_p \supset K'_{p-1} \supset \dots \supset K'_{i+1} \supset K_i \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset$ . ♣

**1.3.3 Démonstration de la Proposition 1.1.4.** Considérons sur  $K$  une filtration  $K = K_n \supset K_{n-1} = \Sigma \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset$ , par des sous-complexes simpliciaux vérifiant 6. Elle devient simpliciale après subdivision barycentrique. Puisque toute filtration simpliciale reste telle après subdivision, il suffit d'appliquer le Lemme précédent pour avoir le résultat cherché. ♣

Dans le reste de ce travail,  $K$  sera un complexe stratifié de dimension  $n$  et de filtration  $K = K_n \supset K_{n-1} = \Sigma \supset \dots \supset K_0 \supset K_{-1} = \emptyset$ .

## 2 Cohomologie d'intersection

Nous introduisons et étudions dans cette section la cohomologie d'intersection d'un complexe stratifié  $K$ . Nous présentons cette cohomologie du point de vue simplicial et non PL (cf. [13]).

On fixe pour la suite un anneau unitaire commutatif  $R$  comme système de coefficients.

### 2.1 Cohomologie d'intersection d'un complexe stratifié.

**2.1.1** Une **perversité**  $\bar{p}$  est une suite d'entiers  $(p_2, \dots, p_n)$  vérifiant  $p_2 = 0$  et  $p_k \leq p_{k+1} \leq p_k + 1$  pour tout  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ . Un simplexe  $\sigma \in K$  de dimension  $j$  est **permis** (ou  **$\bar{p}$ -permis**) si:

$$(11) \quad \dim(\sigma \cap K_{n-k}) \leq j - k + p_k$$

pour tout  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ . On remarquera que si  $\sigma$  est un simplexe permis alors  $\sigma \cap \Sigma$  est dans le squelette de codimension 2 de  $\sigma$ .

Soit  $\sigma$  un simplexe de  $K$  et  $k$  le plus grand entier vérifiant  $\sigma \cap K_{n-k} \neq \emptyset$ . Supposons  $k \neq 0$ , i.e.  $\sigma \cap \Sigma \neq \emptyset$ . Le simplexe  $\sigma$  s'écrit sous la forme  $\beta * \gamma$ , avec  $\beta = \sigma \cap K_{n-k}$ . D'après (11) on a l'équivalence:

$$(12) \quad \sigma \text{ est } \bar{p}\text{-permis} \iff \dim \gamma \geq k - 1 - p_k \text{ et } \gamma \text{ est } \bar{p}\text{-permis.}$$

**2.1.2** Le **complexe des chaînes simpliciales** (à supports compacts) de  $K$  est noté  $C_*(K; R)$ ,  $R$  étant le système de coefficients. Un élément de  $C_*(K; R)$  est donc une somme finie  $\sum_{i \in I} r_i \sigma_i$ , où  $r_i \in R$  et  $\sigma_i \in K$ . L'opérateur bord habituel sera noté  $\partial$ . Le **complexe des cochaînes simpliciales de  $K$**  est noté  $C^*(K; R) = \text{Hom}(C_*(K; R); R)$ . On notera  $d$  l'opérateur dual de  $\partial$ . La cohomologie de  $(C^*(K; R), d)$  est  $H^*(K; R)$ .

Une chaîne  $\sum_{i \in I} r_i \sigma_i$  est **permise** (ou  **$\bar{p}$ -permise**) si chaque  $\sigma_i$ , avec  $r_i \neq 0$ , est permis. On posera:

$$IC_*^{\bar{p}}(K; R) = \{c \in C_*(K; R) / c \text{ et } \partial c \text{ sont des chaînes permises}\},$$

c'est un sous-complexe différentiel de  $C_*(K; R)$ . Soit  $IC_p^*(K; R)$  le complexe dual  $\text{Hom}(IC_*^{\bar{p}}(K; R); R)$ . L'homologie de  $(IC_*^{\bar{p}}(K; R), \partial)$  sera l'**homologie d'intersection** de  $K$ , notée  $IH_*^{\bar{p}}(K; R)$ . La cohomologie de  $(IC_p^*(K; R), d)$  sera la **cohomologie d'intersection** de  $K$ , notée  $IH_p^*(K; R)$ . Observons que tous ces complexes dépendent non seulement de  $K$ , mais aussi de la filtration de  $K$ . Remarquons aussi que tout isomorphisme entre deux complexes stratifiés  $K$  et  $K'$  (cf. (1.1.1)) induit un isomorphisme de modules entre l'homologie (resp. la cohomologie) d'intersection de  $K$  et  $K'$ . Si  $K$  ne possède pas de partie singulière alors  $IH_p^*(K)$  est la cohomologie simpliciale habituelle  $H^*(K)$ .

Remarquons que les définitions précédentes ont encore un sens si  $K$  est un complexe filtré.

**2.1.3** Considérons  $A$  une pseudovariété stratifiée et notons  $\mathcal{IH}_*^{\bar{p}}(A; R)$  l'homologie d'intersection définie dans [9]. Fixons maintenant  $T$  une triangulation sur  $A$  qui en fait un complexe stratifié (1.1.4). D'après [13, Appendice] les modules  $IH_*^{\bar{p}}(A; R)$  et  $\mathcal{IH}_*^{\bar{p}}(A; R)$  sont isomorphes; la flèche étant induite par l'inclusion linéaire de  $T$  dans  $A$ . Dans la suite on identifiera  $IH_*^{\bar{p}}(A; R)$  et  $\mathcal{IH}_*^{\bar{p}}(A; R)$ .

Entre la cohomologie d'intersection de  $K$  et celle des sous-complexes stratifiés de  $K$  il y a la relation suivante.

**Proposition 2.1.4** *Soit  $Y$  un sous-complexe stratifié de  $K$ . Alors:*

$$a) IC_*^{\bar{p}}(K; R) \cap C_*(Y; R) = IC_*^{\bar{p}}(Y; R), \text{ si } Y \text{ est transversal, et}$$

$$b) IC_*^{\bar{p}}(K; R) \cap C_*(\mathcal{L}(K); R) = IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R), \text{ si } \mathcal{L}(K) \text{ n'est pas transversal et } \bar{r} \text{ est la perversité}$$

définie par:

$$r_t = \begin{cases} p_t & \text{si } t < n - m + 1 \\ p_{t-1} + 1 & \text{si } t = n - m + 1 \\ p_{n-m} + 1 & \text{si } t > n - m + 1. \end{cases}$$

Cette perversité sera appelée **perversité résiduelle**.

**Démonstration.** a) Soit  $\sigma$  un simplexe de  $Y$  de dimension  $j$  et  $Y \cap K_{n-k} \neq Y \cap K_{n-k-1}$ . La condition (11) devient:

- $\dim(\sigma \cap Y \cap K_{n-k}) \leq j - k + p_k$ , dans  $K \cap Y$ , et
- $\dim(\sigma \cap K_{n-k}) \leq j - k + p_k$ , dans  $K$ .

Puisque  $\sigma \cap Y \cap K_{n-k} = \sigma \cap K_{n-k}$  et  $\text{cod}_Y(Y \cap K_{n-k}) = k$  les deux conditions précédentes sont équivalentes, d'où le résultat.

b) On procède de la même façon en tenant compte des égalités:  $\text{cod}_{\mathcal{L}(K)}(\mathcal{L}(K) \cap K_m) = n - m + 1$  et  $j - (n - m) + p_{n-m} = j - (n - m + 1) + r_{n-m+1}$ , pour le cas  $\dim \mathcal{L}(K) = n$ . ♣

Remarquons que les sous-complexes suivants de  $K$  vérifient la condition a):  $L_\alpha, \alpha * L_\alpha$  avec  $\alpha \in K$ ; le sous-complexe  $K$  de  $\Delta * K$ . Pour le cas où le complexe résiduel n'est pas transversal, nous avons eu besoin d'introduire la notion de perversité résiduelle; en fait, la seule différence significative entre  $\bar{p}$  et  $\bar{r}$  se trouve dans les termes  $(n - m)$  et  $(n - m - 1)$ , ce qui correspond au passage  $K_m \rightarrow \mathcal{L}(K) \cap K_m$ . Cette même situation de changement de perversité dans le passage aux sous-complexes se trouve dans ([9, page 144]). Pour unifier la notation on posera  $\bar{r} = \bar{p}$  pour le cas où  $\mathcal{L}(K)$  est transversal.

En termes de cochaînes le résultat précédent se traduit comme suit:

**Proposition 2.1.5** *La restriction des cochaînes induit les applications:*

- a)  $IC_{\bar{p}}^*(K; R) \longrightarrow IC_{\bar{p}}^*(Y; R)$  si  $Y$  est transversal,
- b)  $IC_{\bar{p}}^*(K; R) \longrightarrow IC_{\bar{r}}^*(\mathcal{L}(K); R)$ .

## 2.2 Calcul de $IH_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); R)$ .

Nous montrons dans la suite comment obtenir la cohomologie d'intersection de  $K$  à l'aide de la cohomologie d'intersection de  $\mathcal{L}(K)$  et de celle des  $\alpha * L_\alpha$ , où  $\alpha$  parcourt la famille des simplexes de  $K$  dont la dimension est égale au degré minimal.

Nous commençons avec un Lemme qui sera utile dans la suite. Rappelons que le **support** d'une chaîne  $\xi \in C_*(K; R)$ , noté  $\xi$ , est la réunion des simplexes dont les coefficients dans  $\xi$  sont différents de zéro.

**Lemme 2.2.1** *Soit  $\xi$  une chaîne de  $IC_{*}^{\bar{p}}(K; R)$ . Soit  $k$  le plus grand entier vérifiant  $\xi \cap K_{n-k} \neq \emptyset$ . Alors  $\xi$  s'écrit de façon unique sous la forme:*

$$(13) \quad \xi = \sum_{\alpha \in I} \alpha * \gamma_\alpha + \xi'$$

où

$$a) \xi' \in IC_{*}^{\bar{p}}(K; R) \text{ avec } \xi' \cap K_{n-k} = \emptyset,$$

et pour chaque  $\alpha \in I$

$$b) \alpha \in K_{n-k} - K_{n-k-1},$$

$$c) \gamma_\alpha \text{ est une chaîne non nulle de } IC_{>k-1-p_k}^{\bar{p}}(L_\alpha; R) + (IC_{k-1-p_k}^{\bar{p}}(L_\alpha; R) \cap \partial^{-1}(0)),$$

$$d) \alpha * \gamma_\alpha \in IC_{*}^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R).$$

**Démonstration.** Remarquons que la condition d) implique que  $\xi'$  est un élément de  $IC_{*}^{\bar{p}}(K; R)$  (cf. (2.1.4)). D'autre part, c) implique d) (cf. (12)). Il suffit donc de construire (13) vérifiant  $\xi' \cap K_{n-k} = \emptyset$ , b) et c).

La chaîne  $\xi$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\xi = \sum_{\alpha \in I} \alpha * \gamma_\alpha + \xi'$ , où  $\xi'$  est une chaîne de  $C_*(K; R)$  avec  $\xi' \cap K_{n-k} = \emptyset$ ,  $\alpha \in K_{n-k} - K_{n-k-1}$  et  $\gamma_\alpha$  est une chaîne non nulle de  $C_*(L_\alpha; R)$ . Il reste donc à montrer c). Puisque  $\xi$  est permise, les chaînes  $\alpha * \gamma_\alpha$  sont permises; d'après (12) chaque chaîne  $\gamma_\alpha$  est aussi permise et appartient à  $C_{\geq k-1-p_k}(L_\alpha; R)$ .

Posons  $I_0 = \{\alpha \in I \text{ de dimension maximale}\}$  et  $I_1$  son complémentaire. Le bord de  $\xi$  s'écrit, au signe près  $\partial\xi = \pm \sum_{\alpha \in I_0} \alpha * \partial\gamma_\alpha \pm \sum_{\alpha \in I_1} \alpha * \partial\gamma_\alpha \pm \sum_{\alpha \in I_0} \partial\alpha * \gamma_\alpha \pm \sum_{\alpha \in I_1} \partial\alpha * \gamma_\alpha, \pm \partial\xi'$  avec la convention  $0 * \cdot = 0$ . Remarquons que, d'après le choix de  $I_0$ , les termes  $\alpha * \partial\gamma_\alpha$ , pour  $\alpha \in I_0$ , ne sont pas éliminés dans l'écriture de  $\partial\xi$ . En raisonnant comme plus haut, on montre que, pour  $\alpha \in I_0$ , les chaînes  $\partial\gamma_\alpha$  sont permises et appartiennent à  $C_{\geq k-1-p_k}(L_\alpha; R)$ . Ceci montre la propriété c) pour  $\alpha \in I_0$ . On termine la démonstration en considérant la chaîne  $\xi' = \xi - \sum_{\alpha \in I_0} \alpha * \gamma_\alpha$ . ♣

Une première conséquence de ce Lemme est la

**Proposition 2.2.2** *La restriction  $\rho : IC_{\bar{p}}^*(K; R) \longrightarrow IC_{\bar{r}}^*(\mathcal{L}(K); R)$  est un épimorphisme différentiel.*

**Démonstration.** D'après le Lemme précédent et (2.1.4) toute chaîne  $\xi \in IC_{\bar{p}}^*(K; R)$  possède une et une seule décomposition de la forme  $\xi = \sum_{\alpha \in I_m} \alpha * \gamma_\alpha + \xi_1$  où  $\xi_1 \in IC_{\bar{r}}^*(\mathcal{L}(K); R)$  et  $\gamma_\alpha \in IC_{\bar{p}}^*(L_\alpha; R)$  pour chaque  $\alpha \in I_m$ . On définit une section  $\mathcal{S}$  de la restriction en posant  $\mathcal{S}(F)(\xi) = F(\xi_1)$ . La restriction  $\rho$  commute avec les différentielles. ♣

**2.2.3** Désignons par  $IC_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); R)$  le noyau de la restriction  $IC_{\bar{p}}^*(K; R) \rightarrow IC_{\bar{r}}^*(\mathcal{L}(K); R)$  et par  $IH_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); R)$  la cohomologie correspondante. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow IC_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); R) \longrightarrow IC_{\bar{p}}^*(K; R) \longrightarrow IC_{\bar{r}}^*(\mathcal{L}(K); R) \longrightarrow 0$$

qui donne lieu à la suite exacte de la paire  $(K, \mathcal{L}(K))$

$$\cdots \rightarrow IH_{\bar{r}}^{i-1}(\mathcal{L}(K); R) \rightarrow IH_{\bar{p}}^i(K, \mathcal{L}(K); R) \rightarrow IH_{\bar{p}}^i(K; R) \rightarrow IH_{\bar{r}}^i(\mathcal{L}(K); R) \rightarrow \cdots$$

Si  $K_0 \neq \emptyset$  le complexe résiduel est la réunion des cônes  $cL_\alpha$ ,  $\alpha \in K_0$ . On trouve donc la relation

$$IH_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); R) \cong \prod_{\alpha \in K_0} IH_{\bar{p}}^*(\alpha * L_\alpha, L_\alpha = \mathcal{L}(\alpha * L_\alpha); R).$$

Notre objectif est d'étendre cette relation au cas général.

Soit  $\Delta$  le simplexe standard de dimension  $l$ . Rappelons que  $\delta\Delta$  désigne le bord de  $\Delta$  considéré comme complexe simplicial. Le complexe  $\delta\Delta * K$  est justement le complexe résiduel de  $\Delta * K$ . Pour  $l = 0$  on posera  $\delta\Delta * K = K$ . Le résultat principal de cette section s'énonce:

**Proposition 2.2.4** *La restriction des cochaînes induit un isomorphisme*

$$IH_p^*(K, \mathcal{L}(K); R) \cong \prod_{\alpha \in I_m} IH_p^*(\alpha * L_\alpha, \delta\alpha * L_\alpha; R),$$

où  $I_m$  est l'ensemble des simplexes de  $K_m$  de dimension maximale  $m$ .

**Démonstration.** Remarquons que le module  $IC_p^*(K, \mathcal{L}(K); R)$  est isomorphe au module quotient  $Hom(IC_*^{\bar{p}}(K; R) / IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R); R)$ . Il suffira donc de prouver que l'inclusion de complexes induit un isomorphisme au niveau de quotients:  $\frac{IC_*^{\bar{p}}(K; R)}{IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R)} \cong \bigoplus_{\alpha \in I_m} \frac{IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R)}{IC_*^{\bar{r}}(\delta\alpha * L_\alpha; R)}$  Appliquons le Lemme 2.2.1 à  $k = n - m$ . Toute chaîne  $\xi \in IC_*^{\bar{p}}(K; R)$  s'écrit donc sous la forme:

$$(14) \quad \xi = \sum_{\alpha \in I_m} \alpha * \gamma_\alpha + \xi'' \text{ avec } \xi'' = \sum_{\beta \in K_m - I_m} \beta * \gamma_\beta + \xi'$$

où  $\gamma_\alpha \in IC_*^{\bar{p}}(L_\alpha; R)$ ,  $\alpha * \gamma_\alpha \in IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R)$  et  $\xi'' \in IC_*^{\bar{p}}(K; R)$  avec  $\dim(\xi'' \cap K_m) < m$ . Cette dernière condition implique que  $\xi''$  est une chaîne de  $IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R)$  (cf. (2.1.4)). Par conséquent on a l'égalité:

$$IC_*^{\bar{p}}(K; R) = \sum_{\alpha \in I_m} IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R) + IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R). \text{ Ainsi}$$

$$\frac{IC_*^{\bar{p}}(K; R)}{IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R)} = \sum_{\alpha \in I_m} \frac{IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R) + IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R)}{IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R)},$$

qui est isomorphe à  $\frac{\sum_{\alpha \in I_m} IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R)}{\sum_{\alpha \in I_m} IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R) \cap IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R)}$ . Puisque  $\delta\alpha * L_\alpha$  est le complexe résiduel de

$\alpha * L_\alpha$  nous avons  $IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R) \cap IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(K); R) = IC_*^{\bar{r}}(\mathcal{L}(\delta\alpha * L_\alpha; R))$  (cf. (2.1.4)). Le quotient

précédent devient  $\frac{\sum_{\alpha \in I_m} IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R)}{\sum_{\alpha \in I_m} IC_*^{\bar{r}}(\delta\alpha * L_\alpha; R)}$  qui n'est rien d'autre que  $\bigoplus_{\alpha \in I_m} \frac{IC_*^{\bar{p}}(\alpha * L_\alpha; R)}{IC_*^{\bar{r}}(\delta\alpha * L_\alpha; R)}$ . Il est aisé de

voir que l'isomorphisme est donné par l'inclusion. ♣

### 2.3 Lemme de Poincaré

Le complexe  $\Delta * K$ , où  $\Delta$  est le simplexe standard de dimension  $l$ , est un complexe filtré de dimension  $n + l + 1$ . Dans ce paragraphe nous calculons  $IH_p^*(\Delta * K; R)$  à partir de  $IH_p^*(K; R)$ . C'est le calcul local caractéristique de la cohomologie d'intersection, qui joue le rôle du Lemme de Poincaré de [18].

Nous commençons par décrire les éléments de  $IC_*^{\bar{p}}(\Delta * K; R)$  à l'aide des éléments de  $IC_*^{\bar{p}}(K; R)$ . Le **complexe tronqué de  $K$**  (cf. [10, pag.93]) est le complexe différentiel:

$$\tau C_*^{\bar{p}}(K; R) = \bigoplus_{j > n - p_{n+1}} IC_j^{\bar{p}}(K; R) \oplus (IC_{n-p_{n+1}}^{\bar{p}}(K; R) \cap \partial^{-1}(0)).$$

En appliquant (2.2.1) pour  $k = n + 1$ , toute chaîne  $\xi \in IC_*^{\bar{p}}(\Delta * K; R)$  s'écrit de façon unique sous la forme:

$$(15) \quad \xi = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha * \gamma_\alpha + \xi',$$

où  $\gamma_\alpha \in \tau C_*^{\bar{p}}(K; R)$  et  $\xi' \in IC_*^{\bar{p}}(K; R)$ .

**Lemme 2.3.1** *L'application*

$$(16) \quad f : C_*(\Delta; R) \otimes \tau C_*^{\bar{p}}(K; R) \longrightarrow \frac{IC_*^{\bar{p}}(\Delta * K; R)}{IC_*^{\bar{p}}(K; R)}$$

définie par linéarité à partir de  $f(\alpha \otimes \beta) = \llbracket \alpha * \beta \rrbracket$  (classe de  $\alpha * \beta$ ),  $\alpha \in \Delta$  et  $\beta \in K$  est un isomorphisme différentiel de degré +1.

**Démonstration.** D'après (12) le simplexe  $\alpha * \beta$  est permis, l'application  $f$  est donc bien définie. L'inverse est donnée par  $f^{-1}(\bar{\xi}) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\alpha \otimes \gamma_\alpha)$  (cf. (15)). Il suffit de montrer que  $f$  commute avec la différentielle; puisque  $\dim \beta > 0$  ( $n - p_{n+1} \geq 1$ ) il faut distinguer deux cas d'après la dimension de  $\alpha$ :

- Soit  $\dim \alpha > 0$ , alors  $f(\partial(\alpha \otimes \beta)) = f(\partial\alpha \otimes \beta + (-1)^{\dim \alpha - 1} \alpha \otimes \partial\beta) = \llbracket \partial\alpha * \beta + (-1)^{\dim \alpha - 1} \alpha * \partial\beta \rrbracket = \llbracket \partial(\alpha * \beta) \rrbracket = \bar{\partial}f(\alpha \otimes \beta)$ , où  $\bar{\partial}$  désigne la différentielle induite par  $\partial$  sur le quotient  $IC_*^{\bar{p}}(\Delta * K; R)/IC_*^{\bar{p}}(K; R)$ .

- Soit  $\dim \alpha = 0$ , alors  $f(\partial(\alpha \otimes \beta)) = f((-1)^{\dim \alpha - 1} \alpha \otimes \partial\beta) = \llbracket (-1)^{\dim \alpha - 1} \alpha * \partial\beta \rrbracket = \llbracket \beta + (-1)^{\dim \alpha - 1} \alpha * \partial\beta \rrbracket = \llbracket \partial(\alpha * \beta) \rrbracket = \bar{\partial}f(\alpha \otimes \beta)$ . ♣

**2.3.2** Remarquons que le dual de  $IC_*^{\bar{p}}(\Delta * K; R)/IC_*^{\bar{p}}(K; R)$  est naturellement isomorphe à  $IC_*^*(\Delta * K, K; R)$ . En appliquant le foncteur  $Hom$  à (16) et en tenant compte de ([17, pag.245]) et du fait que  $C_*(\Delta; R)$  est libre, on a l'isomorphisme différentiel de degré -1:

$$Hom(f) : IC_*^*(\Delta * K, K; R) \longrightarrow C^*(\Delta; R) \otimes Hom(\tau C_*^{\bar{p}}(K; R); R).$$

Puisque le simplexe  $\Delta$  est contractile, la cohomologie du produit tensoriel est isomorphe à  $H^*(Hom(\tau C_*^{\bar{p}}(K; R); R))$  (cf. [17, pag.230]). Ainsi, l'application

$$g^* : H^*(Hom(\tau C_*^{\bar{p}}(K; R); R)) \longrightarrow IH_{\bar{p}}^{*-1}(\Delta * K, K; R)$$

définie à partir de  $g(F)([\alpha * \gamma_\alpha]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim \alpha \neq 0 \\ F(\gamma_\alpha) & \text{si } \dim \alpha = 0 \end{cases}$  est un isomorphisme de modules. On est finalement arrivé à la

**Proposition 2.3.3** *L'inclusion  $K \subset \Delta * K$  induit l'isomorphisme de modules*

$$IH_{\bar{p}}^i(\Delta * K; R) \cong \begin{cases} IH_{\bar{p}}^i(K; R) & \text{si } i \leq n - 1 - p_{n+1} \\ 0 & \text{si } i \geq n - p_{n+1} \end{cases}$$

**Démonstration.** Puisque  $\underbrace{\mathcal{L} \cdots \mathcal{L}}_{l+1 \text{ - fois}}(\Delta * K) = K$  (cf. (1.2.4)) et en tenant compte de (2.2.2), on a la suite exacte:

$$(17) \quad 0 \rightarrow IC_{\bar{p}}^*(\Delta * K, K; R) \rightarrow IC_{\bar{p}}^*(\Delta * K; R) \rightarrow IC_{\bar{p}}^*(K; R) \rightarrow 0.$$

Elle a une section donnée par  $\mathcal{S}(F)(\xi = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha * \gamma_\alpha + \xi') = F(\xi')$ . En utilisant l'isomorphisme  $g^*$ , le connectant de cette suite devient la restriction  $IH_{\bar{p}}^*(K; R) \rightarrow H^*(Hom(\tau C_*^{\bar{p}})_*(K; R); R)$ . Pour terminer il suffit de remarquer que la restriction induit l'isomorphisme:

$$H^i(Hom(\tau C_*^{\bar{p}}(K; R); R)) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i < n - p_{n+1} \\ IH_{\bar{p}}^i(K; R) & \text{si } i \geq n - p_{n+1}, \end{cases}$$

puis d'écrire la suite exacte longue associée à (17). ♣

### 3 Eclatement

Dans cette section nous introduisons l'éclaté  $\widetilde{K}$  du complexe stratifié  $K$ . C'est un complexe prismatique à bord obtenu à partir de  $K$  en remplaçant chaque point de  $\Sigma$  par son entrelac transversal. Cette notion correspond à la résolution des singularités de [19] et au déplissage simplicial de [2]. A l'aide de cet

outil nous définissons dans la section suivante les formes d'intersection modérées; elles sont des formes différentielles de  $K - \Sigma$  qui deviennent des formes globales sur l'éclaté  $\widetilde{K}$ .

Nous commençons par l'étude locale de l'éclatement.

### 3.1 Eclatement local

La filtration de  $K$  induit sur chaque simplexe  $\sigma$  une filtration par faces. L'éclatement de  $\sigma$  (éclatement local) consiste à remplacer chaque point singulier par (l'éclatement de) son entrelac transversal. L'objet ainsi construit est un prisme.

Dans (1.2.4) on a défini le cône d'un simplexe  $\sigma \in K$  comme étant le quotient  $\sigma \times [0, 1] / \sigma \times \{0\}$ ; nous noterons  $[x, t]$  un élément générique du cône et  $s$  son sommet  $[x, 0]$ . Pour éviter toute confusion, on posera  $c\sigma = s$  si  $\sigma = \emptyset$ .

Fixons pour la suite un simplexe  $\sigma \in K - \Sigma$ .

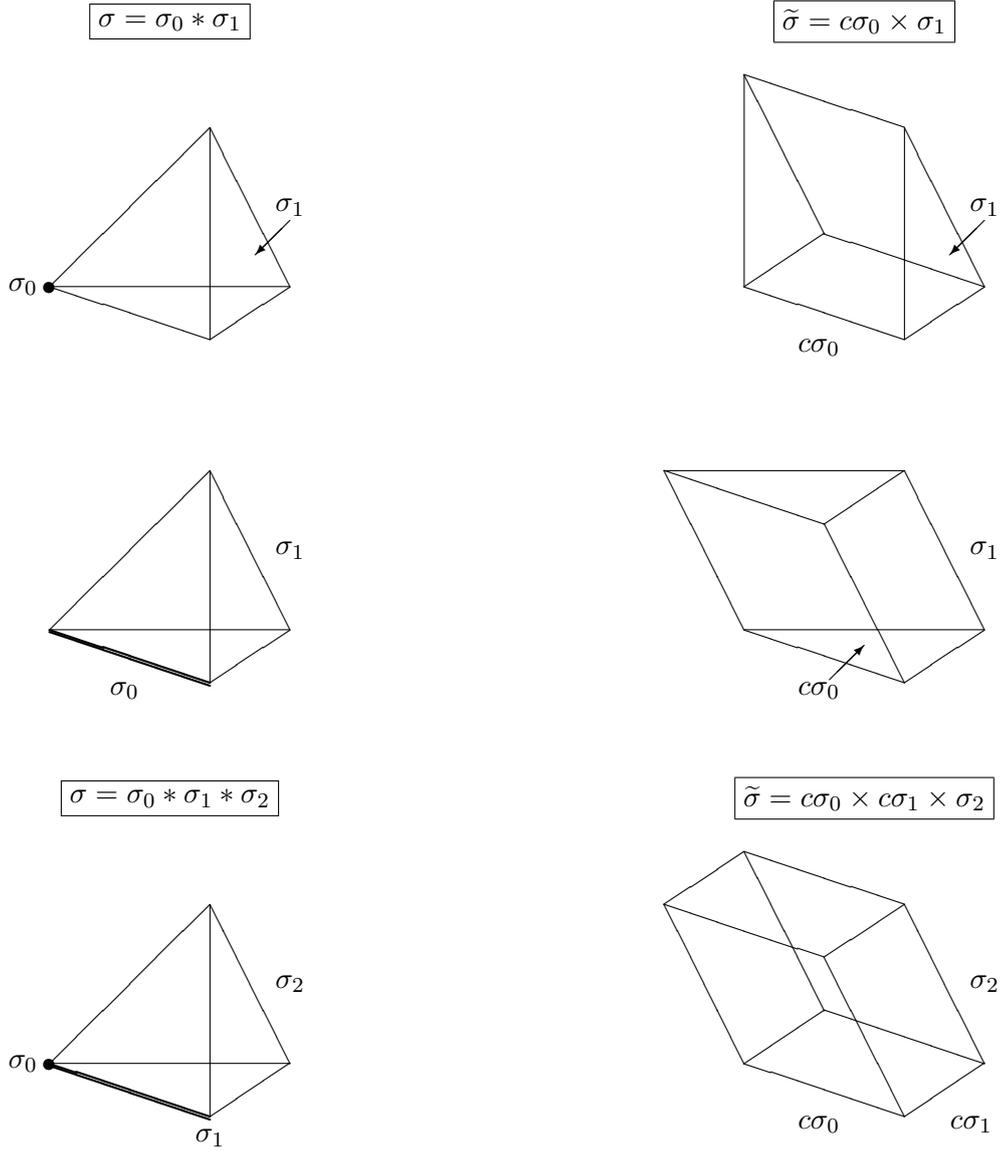
**3.1.1** Rappelons que la trace de chaque  $K_i$  sur  $\sigma$  est une face de  $\sigma$  (cf. (5)). Pour chaque  $i \in \{0, \dots, n\}$ , notons  $\sigma_i$  la face de  $\sigma \cap K_i$  opposée à  $\sigma \cap K_{i-1}$ , c'est-à-dire,  $\sigma \cap K_i = \sigma \cap K_{i-1} * \sigma_i$ . Pour éviter un traitement particulier du cas  $\sigma_i = \emptyset$  (ce qui arrive pour  $i = n - 1$ ) on adoptera la convention  $\emptyset * - = -$ . On obtient ainsi:  $\sigma = \sigma_0 * \sigma_1 * \dots * \sigma_{n-1} * \sigma_n$ , que l'on appelle **décomposition induite** de  $\sigma$ . La face  $\sigma \cap \Sigma$  est la **face singulière** de  $\sigma$ . La face  $\sigma_n$ , qui est non vide si  $\sigma \notin \Sigma$ , est la **face régulière** de  $\sigma$ ; c'est en fait, la plus grande face de  $\sigma$  incluse dans  $K - \Sigma$ .

L'**éclaté** de  $\sigma$  est le prisme  $\tilde{\sigma} = c\sigma_0 \times c\sigma_1 \times \dots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n$ , et l'**éclatement** de  $\sigma$  est l'application  $\mu_\sigma : \tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$  définie par:

$$\mu_\sigma([x_0, t_0], \dots, [x_{n-1}, t_{n-1}], x_n) =$$

$$t_0 x_0 + (1 - t_0)t_1 x_1 + \dots + (1 - t_0) \dots (1 - t_{n-2})t_{n-1} x_n + (1 - t_0) \dots (1 - t_{n-1})x_n.$$

Voyons trois exemples, dont le troisième avec deux strates singulières.



L'application  $\mu_\sigma$  est cellulaire: soient  $(\vec{a}_i, s_i)$  les coordonnées barycentriques de  $[x_i, t_i] \in c\Delta_i$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , et  $\vec{a}_n$  les coordonnées barycentriques de  $x_n \in \Delta_n$ , alors celles de  $\mu([x_0, t_0], \dots, [x_{n-1}, t_{n-1}], x_n)$  sont  $(\vec{a}_0, s_0 \vec{a}_1, \dots, s_0 \cdots s_{n-1} \vec{a}_n)$ ; l'application  $\mu_\sigma$  envoie bien les faces de  $\tilde{\Delta}$  sur les faces de  $\Delta$  de façon différentiable.

La restriction de  $\mu_\sigma$  à  $\tilde{\sigma} - \mu_\sigma^{-1}(\Sigma)$  (ouvert dense de  $\tilde{\sigma}$ ) est un difféomorphisme sur  $\sigma - \Sigma$ . Si  $x$  est un point de  $\sigma_i$ , avec  $i \neq n$ , son image réciproque est isomorphe au prisme  $c\sigma_{i+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n$ , c'est-à-dire, l'éclaté du "entrelac transversal"  $\sigma_{i+1} * \cdots * \sigma_{n-1} * \sigma_n$  de  $x$  dans  $\sigma$ .

Bien plus, toute face  $\tau$  de  $\sigma$  admet un éclaté  $\tilde{\tau}$ . Si  $\tau$  n'est pas incluse dans la partie singulière de  $K$  (i.e.  $\tau_n \neq \emptyset$ ), alors  $\tilde{\tau} = c\tau_0 \times \cdots \times c\tau_{n-1} \times \tau_n$  est une face de  $\tilde{\sigma} = c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n$ .

**3.1.2 Bord.** Le processus d'éclatement fait apparaître de nouvelles faces dans le bord de  $\tilde{\sigma}$ . Nous décrivons maintenant la relation entre l'éclaté du bord et le bord de l'éclaté. Pour simplifier la situation nous nous placerons dans l'hypothèse

$$(18) \quad \text{cod}_{\sigma}(\sigma \cap \Sigma) \geq 2;$$

c'est avec ce type de simplexes que nous travaillerons dans la section 5.

Soient  $F$  une face de codimension un de  $\tilde{\sigma}$  et  $C = \mu(F)$ , la correspondante de  $\sigma$ . Il y a trois types:

$$(a.1) \quad F = c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times cF_i \times c\sigma_{i+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n, \text{ où } F_i \text{ est}$$

une face de codimension un de  $\sigma_i$ ,

$$(a.2) \quad F = c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times F_n, \text{ où } F_n \text{ est une face de codimension un}$$

de  $\sigma_n$ ,

$$(b) \quad F = c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times (\sigma_i \times \{1\}) \times c\sigma_{i+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n.$$

Lorsque  $F$  parcourt les faces de type (a.1) et (a.2) on vérifie aisément que  $C$  parcourt les faces de codimension un de  $F$ . Pour le troisième type on voit que  $C$  est la face  $\sigma_0 * \cdots * \sigma_i = \sigma \cap K_i$ . On remarquera que dans ce cas la restriction de  $\mu$  à  $F$  est la projection canonique de  $F$  sur  $c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times \sigma_i$  composée avec  $\mu_{\sigma_0 * \cdots * \sigma_i}$ ; en particulier, la restriction de  $\mu$  à l'intérieur de  $F$  est une submersion sur l'intérieur de  $C$ .

Considérons sur  $\tilde{\sigma}$  l'orientation qui fait de  $\mu$  un morphisme préservant l'orientation (comme  $\mu$  est un difféomorphisme à l'intérieur de  $\tilde{\sigma}$ , c'est toujours possible !). Nous écrivons donc les bords orientés  $\partial\tilde{\sigma}$  et  $\partial\sigma$  en tenant compte de l'orientation induite. D'après les observations précédentes, on a la relation

$$(19) \quad \partial\tilde{\sigma} = \tilde{\partial}\sigma + \partial_b\tilde{\sigma}$$

où  $\tilde{\partial}\sigma$  est la chaîne constituée par les éclatements des faces de codimension un de  $\sigma$  (cf. (18)) et  $\partial_b\tilde{\sigma}$  est la chaîne formée par les faces de  $\sigma$  de type (b). On remarquera en particulier que l'éclatement du bord  $\partial\sigma$  ne coïncide pas avec le bord de l'éclatement de  $\sigma$ .

### 3.2 Eclatement de $K$

L'éclatement de  $K$  consiste à remplacer chaque simplexe de  $K$  de dimension  $n$  par son éclaté local.

L'objet ainsi construit est un complexe prismatique. Passons aux définitions précises.

**3.2.1 L'éclaté de  $K$** , noté  $\widetilde{K}$ , est la réunion des faces de  $\tilde{\sigma}$ , où  $\sigma$  est un simplexe de dimension  $n$  de  $K - \Sigma$ , c'est-à-dire:

$$\widetilde{K} = \bigcup \{ \eta < \tilde{\sigma} / \text{avec } \sigma \in K - K^{(n-1)} \},$$

où “<” indique “face de”. L'éclatement de  $K$  est l'application  $\mu = \mu_K : \widetilde{K} \rightarrow K$  définie par

$$\mu(x) = \mu_\sigma(x), \text{ si } x \in \sigma \text{ pour } \sigma \in K - \Sigma.$$

D'après la construction de  $\mu_\sigma$ , cette application est bien définie.

L'application  $\mu$  est cellulaire. La restriction de  $\mu$  à  $\widetilde{K} - \mu^{-1}(\Sigma)$  (ouvert dense de  $\widetilde{K}$ ) est un homéomorphisme sur  $K - \Sigma$ .

L'éclaté du tore pincé (cf. [9]):

est le cylindre

Plus généralement, si la dimension du lieu singulier  $\Sigma$  est 0, l'éclaté  $\widetilde{K}$  est construit de la façon suivante.

Considérons  $C(\Sigma, K)$  le complément simplicial de  $\Sigma$  dans  $K$  (cf. [14]). L'éclaté de  $K$  est la somme amalgamée

$$\widetilde{K} = C(\Sigma, K) \amalg \left( \prod_{z \in \Sigma} L_z \times [0, 1] \right) / \sim$$

où  $x \sim (x, 1)$  si  $x \in L_z$  avec  $z \in \Sigma$ . La structure prismatique de  $\widetilde{K}$  est définie naturellement à partir de la structure simpliciale de  $K$ . L'éclatement  $\mu_K$  est défini par

$$\mu_K(\tilde{x}) = \begin{cases} \tilde{x} & \text{si } \tilde{x} \in C(\Sigma, K) \\ tx + (1-t)z & \text{si } \tilde{x} = (x, t) \in L_z \times [0, 1], z \in \Sigma. \end{cases}$$

On considèrera dans la suite le complexe prismatique auxiliaire  $P = \underbrace{cK \times \cdots \times cK}_{n \text{ fois}} \times K$ . Remarquons que  $\widetilde{K}$  est inclus naturellement dans  $P$ .

Comme on l'avait annoncé

**Proposition 3.2.2** *L'ensemble  $\widetilde{K}$  est un sous-complexe prismatique de  $P$  de dimension  $n$ .*

**Démonstration.** Il suffit de vérifier les conditions (2), (3) et (4). La première et la troisième découlent directement de la définition. Pour la deuxième nous remarquons que  $P$  est un complexe prismatique. ♣

La relation entre l'éclatement d'un sous-complexe de  $K$  et  $\widetilde{K}$  lui-même est donnée par la

**Proposition 3.2.3** *Soit  $Y$  un sous-complexe stratifié non inclus dans la partie singulière de  $K$ . Alors il existe une et une seule injection  $\iota : \widetilde{Y} \rightarrow \widetilde{K}$  telle que  $\mu_K \iota = \mu_Y$  et  $\iota$  soit un isomorphisme sur le sous-complexe prismatique  $\iota(\widetilde{Y})$  de  $\widetilde{K}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\tau \in Y_l - Y_{l-1}$ , avec  $l = \dim Y$ . Nous avons deux décompositions de  $\tau$ :  $\tau = \tau_{i_0} * \cdots * \tau_{i_{l-1}} * \tau_{i_l}$  dans  $Y$ , et  $\tau = \tau_0 * \cdots * \tau_n$  dans  $K$ , avec:  $\{i_0, \dots, i_l\} \subset \{0, \dots, n\}$ ,  $i_l = n$  ( $\tau \notin \Sigma$ ) et  $\tau_j = \emptyset$  si  $j \notin \{i_0, \dots, i_l\}$ . Les éclatements respectifs sont naturellement isomorphes car:  $\tilde{\tau}$ (dans  $K$ ) =  $\tilde{\tau}$ (dans  $Y$ )  $\times$   $\underbrace{\{\text{sommet de } c\emptyset\} \times \cdots \times \{\text{sommet de } c\emptyset\}}_{(n-l)\text{-fois}}$ . L'application  $\iota$  ainsi construite est injective, est un isomorphisme sur un sous-complexe de  $\widetilde{K}$  et vérifie la relation  $\mu_K \iota = \mu_Y$ . L'unicité provient du fait que  $\mu_K$  possède une inverse sur  $K - \Sigma$  et du fait que  $Y - \Sigma$  est un sous-ensemble dense de  $Y$ . ♣

Pour éviter des complications techniques, on identifiera  $\tilde{Y}$  avec  $i(\tilde{Y})$  et on dira que  $\tilde{Y}$  est un **sous-complexe prismatique de  $\tilde{K}$** . Avec cette même identification on remarquera que l'on a  $\tilde{K} = K$ , si la partie singulière de  $K$  est vide.

**3.2.4** Pour le joint  $\Delta * K$  (cf. (1.2.4)) l'éclaté est le prisme  $c\Delta \times \tilde{K}$  et l'éclatement est l'application  $\mu_{\Delta * K} : c\Delta \times \tilde{K} \rightarrow \Delta * K$  définie par  $\mu_{\Delta * K}([x, t], y) = tx + (1 - t)\mu(y)$ .

La décomposition de  $K$  (cf. (9)) induit la décomposition suivante de  $\tilde{K}$  en sous-complexes prismatiques:

$$\tilde{K} = \mathcal{L}(\tilde{K}) \cup \left( \bigcup_{\alpha \in I_m} (\alpha * \tilde{L}_\alpha) \right), \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(\tilde{K}) \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I_m} (\alpha * \tilde{L}_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in I_m} \mathcal{L}(\alpha * \tilde{L}_\alpha).$$

### 3.3 Relèvement de $\Sigma$

Dans l'éclatement de  $K$ , chacun des  $K_i$  de  $\Sigma$  devient une face de  $\tilde{K}$ , ces faces sont en position générale. Ceci est traité dans ce paragraphe.

**3.3.1** Remarquons que si  $\sigma$  est un simplexe de  $K$  alors, pour  $i$  entre 0 et  $n - 1$ , l'image réciproque  $\mu^{-1}(\sigma \cap K_i)$  est la réunion des  $c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{j-1} \times (\sigma_j \times \{1\}) \times c\sigma_{j+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n$ , pour  $j$  entre 0 et  $i$ ; c'est la réunion de  $i + 1$  faces de codimension un en position générale. Ainsi, pour chaque  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$  on posera

$$\mathcal{K}_i = \bigcup \{ \eta < c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times (\sigma_i \times \{1\}) \times c\sigma_{i+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n / \sigma \in K - K^{(n-1)} \},$$

que l'on appellera  **$i$ -face** de  $\tilde{K}$  (cf. [19]). Dans le cas où  $K$  n'a pas de bord, le complexe  $\tilde{K}$  est à bord et son bord est constitué par les  $i$ -faces, d'où la définition.

**Proposition 3.3.2** *Les faces de  $\tilde{K}$  vérifient les propriétés suivantes:*

- a) chaque face non vide est un sous-complexe prismatique de codimension un,
- b) les faces se trouvent en position générale,
- c)  $\mu$  envoie  $\mathcal{K}_i$  sur  $K_i$ , et
- d)  $\mu^{-1}(K_i - K_{i-1}) = \mathcal{K}_i - \bigcup_{j < i} \mathcal{K}_j$ .

**Démonstration.** La démonstration de a) est évidente. Pour b) il suffit de remarquer l'égalité

$$\begin{aligned}
& c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times (\sigma_i \times \{1\}) \times c\sigma_{i+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n \cap \\
& c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{j-1} \times (\sigma_j \times \{1\}) \times c\sigma_{j+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n = \\
& c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times (\sigma_i \times \{1\}) \times c\sigma_{i+1} \times \cdots \times \sigma_{j-1} \times (\sigma_j \times \{1\}) \times c\sigma_{j+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n
\end{aligned}$$

pour  $i < j$ . Pour c) on a la relation  $\mu(c\sigma_0 \times \cdots \times c\sigma_{i-1} \times (\sigma_i \times \{1\}) \times c\sigma_{i+1} \times \cdots \times c\sigma_{n-1} \times \sigma_n) = \sigma_0 * \cdots * \sigma_{i-1} * \sigma_i$ .

Finalement, pour d) il faut tenir compte de l'égalité  $\mu^{-1}(\sigma \cap K_i) = \bigcup_{j < i} \tilde{\sigma} \cap K_j$ . ♣

Remarquons que les définitions précédentes ont encore un sens si  $K$  est un complexe filtré. La relation entre les faces de  $\tilde{K}$  et les éclatements des sous-complexes de  $K$  est donnée par la

**Proposition 3.3.3** *Soit  $Y$  un sous-complexe stratifié de  $K$  non inclus dans la partie singulière. Si  $Y \cap K_i \neq Y \cap K_{i-1}$  alors  $\mathcal{Y}_j = \tilde{Y} \cap \mathcal{K}_i$ , où  $j = \dim Y \cap K_i$ .*

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que (avec les notations de (3.2.3)) si  $\tau \in Y_l - Y_{l-1}$  alors nous avons  $\tau_{i_j} = \tau_i$ . ♣

### 3.4 Complexe de Cenkli-Porter

Dans [5] Cenkli et Porter ont montré comment calculer la cohomologie modérée d'un complexe simplicial à l'aide de formes différentielles. Pour cela ils ont introduit la "cubication" d'un complexe simplicial, notion que nous rappelons et étendons à l'éclaté d'un complexe stratifié.

**3.4.1** La cubication de  $\Delta$ , simplexe standard de dimension  $l$ , est un procédé qui décompose  $\Delta$  en un complexe cubique formé de  $l + 1$  cubes de dimension  $l$ . Ces cubes s'appuient dans les sommets de la décomposition barycentrique de  $\Delta$ .

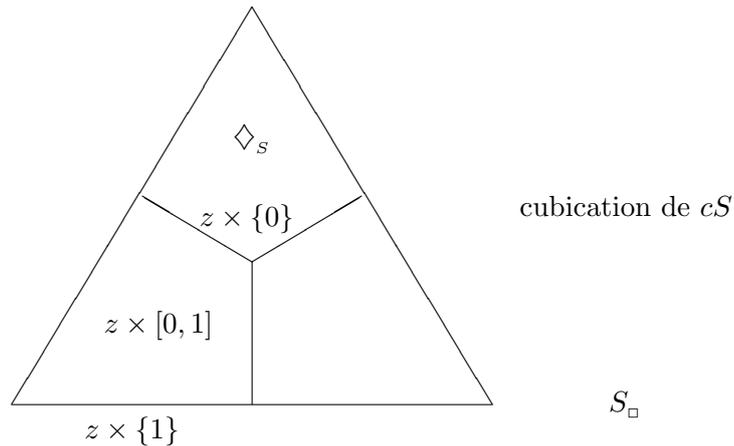
La **cubication de Cenkli-Porter** (en abrégé **cubication**) de  $\Delta$ , notée  $\Delta_{\square}$ , est définie par induction sur  $l$ . Pour  $l = 0$ , on posera  $\Delta_{\square} = \Delta$ . Pour le cas général fixons  $S$  une face de codimension un de  $\Delta$  et  $s$  le sommet opposé. Le simplexe  $\Delta$  est le cône  $cS$ , où on a identifié  $S$  avec  $S \times \{1\}$ . Par hypothèse de récurrence nous avons décomposé  $S$  en  $l$  cubes  $\{\mathcal{C}_i\}_{i=0}^{i=l-1}$ . La cubication de  $\Delta$  est constituée par les cubes de dimension  $l$  suivants:

- le cube engendré par les sommets  $\{P_0^i, \dots, P_{2^{l-1}}^i, Q_0^i, \dots, Q_{2^{l-1}}^i\}$ , pour  $i \in \{0, \dots, l-1\}$ , où  $\{P_0^i, \dots, P_{2^{l-1}}^i\}$  est l'ensemble des sommets de  $C_i$  et  $Q_j^i$  est le barycentre de {face dont le barycentre est  $P_j^i\} * \{s\}$ , pour  $j \in \{0, \dots, 2^{l-1}\}$ , et
- le cube  $\diamond_S$  engendré par  $\{Q_j^i / i \in \{0, \dots, l-1\}, j \in \{0, \dots, 2^{l-1}\}\} \cup \{s\}$ .

On remarquera que la famille des cubes de la cubication  $\Delta_\square$  qui rencontrent  $S$  est un complexe cubique isomorphe à  $S_\square \times [0, 1]$ . Le complexe  $\Delta_\square$  se décompose ainsi en deux parties:

$$(20) \quad \Delta_\square = (S_\square \times [0, 1]) \cup \diamond_S$$

dont l'intersection est  $S_\square \times \{0\}$ .



Puisque la cubication ainsi définie est compatible avec les faces (la restriction de la cubication à une face de  $\Delta$  est la cubication de la face en question), nous pouvons l'étendre aux complexes simpliciaux. Ainsi, la **cubication** d'un complexe simplicial  $K$  de dimension  $n$ , notée  $K_\square$ , est le complexe cubique de dimension  $n$  obtenu par cubication des simplexes de  $K$ .

**3.4.2** Soit  $\Pi = \sigma_0 \times \dots \times \sigma_p$  un prisme. La **cubication de  $\Pi$** , notée  $\Pi_\square$ , est le complexe cubique obtenu comme produit de  $(\sigma_0)_\square, \dots, (\sigma_p)_\square$ . Bien sûr, si  $\Pi$  est un simplexe alors cette notion de cubication coïncide avec la précédente.

Comme dans le cas des simplexes nous pouvons étendre la notion de cubication aux complexes prismatiques. La **cubication** d'un complexe prismatique  $P$  de dimension  $n$ , notée  $P_\square$ , est le complexe cubique

de dimension  $n$  obtenu par cubication des prismes de  $P$ .

Cette construction va être utilisée dans ce travail sur les complexes stratifiés par l'intermédiaire des éclatés. Ainsi, on associera à chaque complexe stratifié  $K$  son éclaté  $\widetilde{K}$ , qui sera cubiqué pour obtenir  $\widetilde{K}_\square$ . Prenons par exemple le joint  $\Delta * K$  (cf. (1.2.4)); son éclaté est le produit  $c\Delta \times \widetilde{K}$  dont la cubication se décompose en deux parties (cf. (20)):

$$(21) \quad c\Delta \times \widetilde{K}_\square = (\Delta_\square \times [0, 1] \times \widetilde{K}_\square) \cup (\diamond_\Delta \times \widetilde{K}_\square)$$

dont l'intersection est  $\Delta_\square \times \{0\} \times \widetilde{K}_\square$ .

### 3.5 Effet de la cubication sur $K$

La cubication de l'éclatement induit sur le complexe  $K$  la décomposition  $\check{K} = \{\mu(c)/c \in \tilde{\sigma}_\square \text{ avec } \sigma \in K - K^{(n-1)}\}$ . Nous montrons dans ce paragraphe que  $\check{K}$  est un complexe cellulaire.

Nous commençons par décrire  $\mu(c_0 \times \cdots \times c_n)$  pour  $c_0 \times \cdots \times c_n \in \tilde{\sigma}_\square$ . Pour cela on pose  $\llbracket c_n \rrbracket = c_n$  et, pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , on définit la cellule  $\llbracket c_i, \dots, c_n \rrbracket$  par (cf. (20)):

$$\llbracket c_i, \dots, c_n \rrbracket = \begin{cases} c_i \times \llbracket c_{i+1}, \dots, c_n \rrbracket & \text{si } c_i \cap (\sigma_i \times \{1\}) = \emptyset, \\ z_i \times c \llbracket c_{i+1}, \dots, c_n \rrbracket & \text{si } c_i = z_i \times [0, 1], \\ z_i & \text{si } c_i = z_i \times \{1\}. \end{cases}$$

**Lemme 3.5.1** *Les faces de la cellule  $\llbracket c_i, \dots, c_n \rrbracket$ , avec  $i \in \{0, \dots, n\}$ , sont les sous-ensembles de la forme  $\llbracket c'_i, \dots, c'_n \rrbracket$ , où chaque  $c'_j$  est une face de  $c_j$ .*

**Démonstration.** Pour  $i = n$  et pour  $c_i = z_i \times \{1\}$  le résultat est évident. Pour les autres cas on procède par induction en distinguant encore deux cas. Si  $c_i \cap (\sigma_i \times \{1\}) = \emptyset$  on a:

$$\text{face de } \llbracket c_i, \dots, c_n \rrbracket = (\text{face de } c_i) \times (\text{face de } \llbracket c_{i+1}, \dots, c_n \rrbracket)$$

et le résultat découle de l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Si } c_i = z_i \times [0, 1] \text{ alors on a: } \text{face de } \llbracket c_i, \dots, c_n \rrbracket = \begin{cases} (\text{face de } z_i) \times c(\text{face de } \llbracket c_{i+1}, \dots, c_n \rrbracket) \\ (\text{face de } z_i) \times \{1\} \times (\text{face de } \llbracket c_{i+1}, \dots, c_n \rrbracket) \end{cases} \quad \text{et}$$

le résultat découle de l'hypothèse de récurrence et du fait que  $z_i \times \{1\}$  est une face de  $c_{\sigma_i}$ . ♣

La relation de  $\llbracket c_i, \dots, c_n \rrbracket$  avec  $\mu(c_0 \times \dots \times c_n)$  est décrite par:

**Lemme 3.5.2** *La cellule  $\llbracket c_0, \dots, c_n \rrbracket$  est homéomorphe à  $\mu(c_0 \times \dots \times c_n)$ .*

**Démonstration.** L'image  $\mu(c_0 \times \dots \times c_n)$  est le quotient du produit  $c_0 \times \dots \times c_n$  par la relation:

$$(x_0, \dots, x_{i-1}, (y_i \times \{1\}), x_{i+1}, \dots, x_n) \sim (x_0, \dots, x_{i-1}, (y_i \times \{1\}), x'_{i+1}, \dots, x'_n),$$

où  $x_j, x'_j \in c_j$ ,  $y_i \in z_i$ , pour  $j \in \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ , et  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Distinguons maintenant trois cas.

$$c_0 \times \dots \times c_n / \sim = \begin{cases} c_0 \times (c_1 \times \dots \times c_n / \sim) & \text{si } c_0 \cap (\sigma_0 \times \{1\}) = \emptyset, \\ z_0 \times c(c_1 \times \dots \times c_n / \sim) & \text{si } c_0 = z_0 \times [0, 1], \\ z_0 \times \{1\} & \text{si } c_0 = z_0 \times \{1\}. \end{cases}$$

On termine à l'aide d'un argument de récurrence. ♣

On arrive finalement à la

**Proposition 3.5.3** *La famille  $\ddot{K}$  est un complexe cellulaire. L'application  $\mu : \widetilde{K}_\square \rightarrow \ddot{K}$  est cellulaire.*

**Démonstration.** Montrons d'abord que  $\ddot{K}$  vérifie les conditions de (1.1.1)). La première découle de (3.5.2). Pour la deuxième considérons  $c = c_0 \times \dots \times c_n$  et  $c' = c'_0 \times \dots \times c'_n$  deux cubes de  $\widetilde{K}_\square$  et montrons que l'intersection  $\mu(c) \cap \mu(c')$  est une face de  $\mu(c)$  (cf. (3.5.1)). Pour cela il suffit de remarquer l'égalité  $\mu(c) \cap \mu(c') = \mu(c_0 \cap c'_0 \times \dots \times c_i \cap c'_i \times c_{i+1} \times \dots \times c_n)$  où  $i$  est le plus petit entier tel que  $\mu(c) \subset K_i$  et  $\mu(c) \not\subset K_{i-1}$ . La troisième est immédiate.

Finalement, l'application  $\mu$  est cellulaire par construction (cf. (3.2.1)). ♣

On notera  $\ddot{\Sigma}$  le sous-complexe de  $\ddot{K}$  constitué par les simplexes inclus dans  $\Sigma$ .

## 4 Cohomologie différentielle

Nous introduisons et étudions dans cette section le complexe des formes différentielles d'intersection modérées  $IT_{\overline{p}}^{*,q}(K)$  qui va calculer la cohomologie d'intersection modérée  $IH_{\overline{p}}^*(K, Q_q)$ . En suivant la

philosophie de [3], une forme différentielle d'intersection  $\omega$  doit être définie sur la partie régulière de  $K$ . Ce fait empêche a priori l'intégration de  $\omega$  sur les chaînes de  $IC_{\mathbb{P}}^*(K, Q_q)$ . D'autre part, il n'est pas clair comment donner un sens à la “modération” de  $\omega$ . C'est pour résoudre ces deux questions que nous avons introduit la notion d'éclatement.

Une forme différentielle d'intersection  $\omega$  est avant tout une forme différentielle sur  $\check{K} - \check{\Sigma}$  qui se relève en une forme différentielle  $\tilde{\omega}$  de  $\tilde{K}_{\square}$ . La “perversité” de  $\omega$  est lue dans le comportement de  $\tilde{\omega}$  dans la partie ajoutée dans le passage  $K \mapsto \tilde{K}$  (i.e.  $\mu^{-1}(\Sigma)$ ). La modération de  $\omega$  est interprétée comme la modération de  $\tilde{K}$  dans la cubication de  $\tilde{K}_{\square}$ , ce qui a un sens car  $\tilde{K}$  est définie globalement sur  $\tilde{K}$ .

## 4.1 Formes différentielles

Nous commençons par rappeler la notion de forme différentielle sur un complexe cellulaire. Ensuite nous introduisons les notions de forme modérée et de forme d'intersection.

**4.1.1** Etant donné un complexe cellulaire  $D$ , on notera  $\Omega^*(D)$  le **complexe des formes différentielles** de  $D$ . Un élément de  $\Omega^*(D)$  est une famille  $(\omega_{\sigma})_{\sigma \in D}$ , où chaque  $\omega_{\sigma}$  est une forme différentielle sur  $\sigma$ , vérifiant la condition de compatibilité suivante:  $\omega_{\sigma} = \omega_{\tau}$  sur  $\tau \cap \sigma$  (plus précisément,  $\iota_1^* \omega_{\sigma} = \iota_2^* \omega_{\tau}$  où  $\iota_1 : \sigma \cap \tau \rightarrow \sigma$  et  $\iota_2 : \sigma \cap \tau \rightarrow \tau$  sont les inclusions). On définit la différentielle  $d : \Omega^*(D) \rightarrow \Omega^{*+1}(D)$  par:  $d(\omega_{\sigma})_{\sigma \in D} = (d\omega_{\sigma})_{\sigma \in D}$ . Remarquons que si  $\omega = (\omega_{\sigma})_{\sigma \in D}$  et  $\eta = (\eta_{\sigma})_{\sigma \in D}$  sont deux formes différentielles sur  $D$ , alors le produit  $\omega \wedge \eta = (\omega_{\sigma} \wedge \eta_{\sigma})_{\sigma \in D}$  et la somme  $\omega + \eta = (\omega_{\sigma} + \eta_{\sigma})_{\sigma \in D}$  sont aussi deux formes différentielles sur  $D$ .

Soit  $D'$  un sous-complexe cellulaire de  $D$ , considéré comme plongé dans  $\mathbb{R}^N$ . Une **forme différentielle** sur  $D - D'$  est une famille  $(\omega_{\sigma})_{\sigma \in D - D'}$  où chaque  $\omega_{\sigma}$  est une forme différentielle sur un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $\sigma - D'$  et vérifiant les mêmes conditions de compatibilité que précédemment. On désigne par  $\Omega^*(D - D')$  la famille de ces formes, c'est aussi une algèbre différentielle.

**4.1.2 Complexe de deRham modéré** (cf. [5]). Chaque monôme

$$x_1^{\nu_1} \cdots x_j^{\nu_j} (dx_1)^{\varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge (dx_j)^{\varepsilon_j},$$

où  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$  et  $\nu_i$  est un entier non négatif, est une forme différentielle sur  $[0, 1]^j$ . L'entier  $\max\{\varepsilon_i + \nu_i\}$

est le **poïds** du monôme. On écrira  $T_Z^{p,q}([0, 1]^j)$  le module, sur l'anneau  $Z$  des entiers, engendré par tous les monômes  $\omega$  de poids inférieur ou égal à  $q$  et de degré  $\deg(\omega) = p = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j$ . Les éléments du  $Q_q = Z[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{q}]$ -module

$$T^{p,q}([0, 1]^j) = T_Z^{p,q}([0, 1]^j) \otimes_Z Q_q$$

sont les **formes modérées** sur  $[0, 1]^j$  de type  $(p, q)$ . Le  $Q_q$ -module  $T^{*,q}(\mathcal{C})$  des formes modérées sur le complexe cubique  $\mathcal{C}$  est une famille des modules  $T^{*,q}(c)$  des formes modérées du type  $(*, q)$ , sur tous les cubes  $c$  de  $\mathcal{C}$ , vérifiant les conditions de compatibilité.

Les modules  $T^{*,*}(\mathcal{C})$  possèdent les propriétés suivantes:

- (i)  $T^{*,q}(\mathcal{C}) \longrightarrow T^{*,q+1}(\mathcal{C})$  est une injection,
- (ii)  $T^{p,q}(\mathcal{C}) \otimes T^{p',q'}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\wedge} T^{p+p',q+q'}(\mathcal{C})$  est un produit commutatif;  $a \wedge b = (-1)^{\deg a \cdot \deg b} b \wedge a$ ,
- (iii)  $d : T^{p,q}(\mathcal{C}) \longrightarrow T^{p+1,q}(\mathcal{C})$  est induite par la différentielle sur chaque cube.

On dira que  $T^{*,*}(\mathcal{C})$  est le **complexe des formes modérées** de  $\mathcal{C}$ . Le complexe  $T^{*,q}(\mathcal{C})$  est un sous-module différentiel de  $\Omega^*(\mathcal{C})$  et  $T^{*,*}(\mathcal{C}) = \bigcup_{q \geq 0} T^{*,q}(\mathcal{C})$  est un sous-complexe différentiel de  $\Omega^*(\mathcal{C})$ .

**4.1.3 Formes relevables.** Considérons un élément  $c$  de la cubication  $\widetilde{K}_\square$  de Cenkl-Porter de  $\widetilde{K}$ . Rappelons que  $\mu(c)$  est une cellule de  $\ddot{K}$ . Supposons que cette cellule n'est pas incluse dans  $\Sigma$ . On dira qu'une forme différentielle  $\omega$  sur  $\mu(c) - \ddot{\Sigma}$  est **relevable** s'il existe une forme différentielle  $\tilde{\omega}$  sur  $c$  telle que  $\tilde{\omega} = \mu^*\omega$  sur  $c - \mu^{-1}(\Sigma)$ . La forme  $\mu^*\omega$  est bien définie car  $\mu$  est différentiable. La forme  $\tilde{\omega}$ , appelée **relevé** de  $\omega$ , est unique car  $c - \mu^{-1}(\Sigma)$  est dense dans  $c$ . On remarquera les relations:  $\widetilde{d\omega} = d\tilde{\omega}$ ,  $\widetilde{\omega \frown \eta} = \tilde{\omega} + \tilde{\eta}$  et  $\widetilde{\omega \wedge \eta} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}$ .

Voyons sur un exemple qu'il existe des formes non relevables. Considérons le simplexe standard  $\Delta$  de dimension 2, de sommets  $A_0, A_1$  et  $A_2$ . Soit  $\Sigma = \{A_0\}$ . L'éclatement de  $\Delta$  est l'application:  $\mu : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Delta$  définie par  $\mu(t, s) = tA_0 + (1-t)sA_1 + (1-t)(1-s)A_2$ . Soient  $\omega_1 = \frac{t_1}{1-t_0} dt_1$  et  $\omega_2 = \frac{t_1}{(1-t_0)^2} dt_1$  deux formes sur  $\Delta - \{A_0\}$ . La première est relevable la deuxième ne l'est pas, car:  $\mu^*\omega_1 = s(-s dt + (1-t) ds)$  et  $\mu^*\omega_2 = \frac{s}{1-t}(-s dt + (1-t) ds)$ .

Globalement, nous dirons qu'une forme  $\omega = (\omega_{\mu(c)}) \in \Omega^*(\ddot{K} - \ddot{\Sigma})$  est une **forme relevable** s'il existe  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_c) \in \Omega^*(\widetilde{K}_\square)$  telle que chaque  $\tilde{\omega}_c$  est le relevé de  $\omega_{\mu(c)}$ . Remarquons que si  $\Sigma = \emptyset$  alors toute forme

sur  $\check{K} = K_{\square}$  est relevable.

**4.1.4 Formes d'intersection.** Le degré de “perversité” d’une forme relevable  $\omega$  est mesuré par le comportement de  $\tilde{\omega}$  dans la partie ajoutée dans le passage  $K \leftrightarrow$  éclaté de  $K$ : les  $i$ -faces de  $\tilde{K}$ . Nous décrivons maintenant cette situation.

Etant donnée une forme différentielle  $\omega$  sur  $c$  nous définissons son  **$i$ -degré vertical**  $\|\omega\|_i$  comme étant:

$$\min\{j \in \mathbf{N} / \tilde{\omega}(v_0, \dots, v_j, -) = 0$$

pour toute famille  $v_0, \dots, v_j$  de vecteurs de  $c$  tangents aux fibres de

$$\mu : \mathcal{K}_i \rightarrow K_i\}.$$

Par convention on posera  $\|0\|_i = -\infty$ . Remarquons les inégalités:  $\|\omega_1 + \omega_2\|_i \leq \max(\|\omega_1\|_i, \|\omega_2\|_i)$  et  $\|\omega_1 \wedge \omega_2\|_i \leq \|\omega_1\|_i + \|\omega_2\|_i$ . C’est avec cette notion de degré que nous décidons de la “permissibilité” des formes différentielles (cf. [3, pag.10],[2]).

Nous dirons qu’une forme différentielle  $\omega$  est **permise** (ou  **$\bar{p}$ -permise**) si pour chaque  $i \in \{2, \dots, n\}$  on a:

$$(22) \quad \|\omega\|_i \leq n - i - 2 - p_{n-i}.$$

La forme  $\omega$  est **d’intersection** (ou de  **$\bar{p}$ -intersection**) si les formes  $\omega$  et  $d\omega$  sont permises.

La permissibilité d’une forme différentielle de  $c$  dépend du complexe  $K$  de la façon suivante.

**Lemme 4.1.5** Soient  $Y$  un sous-complexe stratifié de  $K$ , non inclus dans la partie singulière de  $\Sigma$ , et  $c$  un cube de  $Y$ . Pour toute forme différentielle  $\omega$  sur  $c$  on a:

a)  $\omega$  est  $\bar{p}$ -permise (dans  $\tilde{Y}$ )  $\Leftrightarrow \omega$  est  $\bar{p}$ -permise (dans  $\tilde{K}$ ), si  $Y$  est transversal,

b)  $\omega$  est  $\bar{r}$ -permise (dans  $\tilde{Y}$ )  $\Leftrightarrow \omega$  est  $\bar{p}$ -permise (dans  $\tilde{K}$ ), si  $Y = \mathcal{L}(K)$ .

**Démonstration.** a) Posons  $l = \dim Y$ . D’après (3.3.3) nous avons ( $Y \not\subset \Sigma$ ):  $\mathcal{Y}_{l-k} = \mathcal{K}_{n-k} \cap \tilde{Y}$ , pourvu que  $Y_{l-k} \neq Y_{l-k-1}$ . La Proposition (3.2.3) permet d’écrire la relation  $\|\omega\|_{n-k}$  (dans  $\tilde{K}$ ) =  $\|\omega\|_{l-k}$  (dans  $\tilde{Y}$ ), pour toute forme  $\omega$  de  $\tilde{Y}$ . On a terminé car:  $\|\omega\|_{n-k} \leq k - 2 - p_k \Leftrightarrow \|\omega\|_{l-k} \leq k - 2 - p_k$ .

b) On procède de la même façon, sauf pour le cas  $i = m - 1$  et  $\dim \mathcal{L}(K) = n$ . Ici nous avons:  $(m - 1)$ -face de  $\widetilde{\mathcal{L}}(K) = \mathcal{K}_m \cap \widetilde{\mathcal{L}}(K)$ , et donc

$$\|\omega\|_{m=n-(n-m)}(\text{dans } \widetilde{K}) = \|\omega\|_{m-1=n-(n-m+1)}(\text{dans } \widetilde{\mathcal{L}}(K)).$$

Le résultat découle de l'équivalence:  $\|\omega\|_m \leq n - m - 2 - p_{n-m} \Leftrightarrow \|\omega\|_{m-1} \leq n - m - 1 - r_{n-m+1}$ . ♣

**4.1.6** Une forme différentielle  $\omega = (\omega_c)$  de  $\widetilde{K}_\square$  est **permise** (ou  **$\bar{p}$ -permise**) si chaque  $\omega_c$  est une forme permise. La forme  $\omega$  est **d'intersection** (ou de  **$\bar{p}$ -intersection**) si les formes  $\omega$  et  $d\omega$  sont permises. On désignera par  $I\Omega_{\bar{p}}^*(\widetilde{K}_\square)$  le complexe des formes d'intersection. On remarquera que si la partie singulière de  $K$  est vide, alors ce complexe coïncide avec  $\Omega^*(K_\square)$ , complexe des formes modérées de  $K_\square$ .

Le complexe des formes différentielles qui va calculer la cohomologie d'intersection modérée de  $K$  est:

$$IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) = \{\omega \in \Omega^*(\ddot{K} - \ddot{\Sigma})/\omega \text{ relevable et } \tilde{\omega} \text{ modérée et d'intersection}\},$$

que nous appellerons le **complexe des formes modérées d'intersection de  $K$** . C'est un sous-complexe différentiel de  $\Omega^*(\ddot{K} - \ddot{\Sigma})$ .

Vu que l'opérateur  $\mu^*$  établit un isomorphisme entre les formes releposables de  $\ddot{K} - \ddot{\Sigma}$  et les formes différentielles de  $\widetilde{K}_\square$  nous identifierons dans la suite de ce travail ces deux complexes. Ainsi, nous avons:  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) = \{\omega \in T^{*,q}(\widetilde{K}_\square)/\omega \text{ est d'intersection}\} = T^{*,q}(\widetilde{K}_\square) \cap I\Omega_{\bar{p}}^*(\widetilde{K}_\square)$ .

Remarquons finalement que si  $\Sigma = \emptyset$ , alors le complexe précédent coïncide avec le complexe des formes modérées de  $K_\square$ . Les définitions précédentes ont encore un sens si  $K$  est un complexe filtré.

**4.1.7** Illustrons cette notion par l'exemple du tore pincé (cf. (3.2.1)). Puisque  $\Sigma$  est réduit à un point, nous avons nécessairement  $\bar{p} = 0$ . Rappelons que la réalisation géométrique de  $\widetilde{K}$  est un cylindre. Un cube  $c$  de  $\widetilde{K}_\square$  de dimension 2 ou bien ne rencontre pas le bord du cylindre, ou bien le rencontre dans une face  $c'$  de dimension 1. Dans le premier cas:  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(c) = T^{*,q}(c)$ . Pour le deuxième cas, posons  $c = [0, 1] \times [0, 1]$  et  $c' = [0, 1] \times \{0\}$ . Une forme  $\omega \in T^{*,q}(c)$  est permise si elle est engendrée par monômes

du type:

- $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$  avec  $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leq q$ ,
- $x_1 x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} dx_1$  avec  $\max\{\nu_1 + 2, \nu_2\} \leq q$ ,
- $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} dx_2$  avec  $\max\{\nu_1, \nu_2 + 1\} \leq q$ , et
- $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} dx_1 dx_2$  avec  $\max\{\nu_1 + 1, \nu_2 + 1\} \leq q$ .

Le comportement de ces formes par rapport aux sous-complexes stratifiés est analogue au comportement des chaînes d'intersection (cf. (2.1.4) et (2.2.2)).

**Proposition 4.1.8** *La restriction des formes induit les applications:*

- a)  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) \rightarrow IT_{\bar{p}}^{*,q}(Y)$  si  $Y$  est un sous-complexe transversal, et
- b)  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) \rightarrow IT_{\bar{r}}^{*,q}(\mathcal{L}(K))$ .

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que la restriction des formes conserve la caractère modérée de ces formes et de prendre compte de (4.1.5). ♣

## 4.2 Calcul de $H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K)))$

Nous montrons dans la suite comment calculer la cohomologie de  $K$  à l'aide de la cohomologie de  $\mathcal{L}(K)$  et celle des  $\alpha * L_\alpha$ , où  $\alpha$  parcourt la famille des simplexes de  $K$  dont la dimension est le degré minimal.

**4.2.1** Désignons par  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K))$  le noyau de la restriction  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) \rightarrow IT_{\bar{r}}^{*,q}(\mathcal{L}(K))$  (cf. (4.1.8 b)).

D'après la décomposition (9) la restriction des formes induit l'isomorphisme de modules différentiels

$$IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K)) \cong \prod_{\alpha \in I_m} IT_{\bar{p}}^{*,q}(\alpha * L_\alpha, \delta\alpha * L_\alpha).$$

Le but des Lemmes qui suivent est de montrer que l'application restriction de  $K$  dans  $\mathcal{L}(K)$  est surjective, c'est-à-dire, que l'on a la suite exacte  $0 \rightarrow IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K)) \rightarrow IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) \rightarrow IT_{\bar{r}}^{*,q}(\mathcal{L}(K)) \rightarrow 0$ .

Celle-ci induira la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^{j-1}(IT_{\bar{r}}^{*,q}(\mathcal{L}(K))) \rightarrow H^j(IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K))) \rightarrow H^j(IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)) \rightarrow H^j(IT_{\bar{r}}^{*,q}(\mathcal{L}(K))) \rightarrow \dots$$

**Lemme 4.2.2** Soit  $\sigma$  un simplexe de  $K$  et  $\pi : \tilde{\sigma} \rightarrow c\sigma_0$  la projection sur le premier facteur (cf. (3.1.1)).

Pour tout cube  $c$  de  $\tilde{\sigma}_\square$  et toute forme différentielle  $\omega$  définie sur  $\pi(c)$ , la restriction de  $\pi^*\omega$  aux fibres de  $\mu$  est nulle.

**Démonstration.** Considérons l'application  $\rho : \sigma \rightarrow c\sigma_0$  définie par  $\rho(\alpha_0x_0 + \dots + \alpha_nx_n) = [x_0, \alpha_0]$ . Elle est cellulaire, car en coordonnées barycentriques elle s'écrit:  $\rho(\underbrace{u_0, \dots, u_{l_0}}_{\in \sigma_0}, \dots, \underbrace{v_0, \dots, v_{l_n}}_{\in \sigma_n}) = (u_0, \dots, u_{l_0}, 1 - (u_0 + \dots + u_{l_0}))$ . Le résultat découle maintenant de la relation  $\rho\mu = \pi$ . ♣

**Lemme 4.2.3** Soient  $c = c_0 \times c_1 \times \dots \times c_n$  et  $c' = c'_0 \times c_1 \times \dots \times c_n$  deux éléments de la cubication de  $\tilde{K}_\square$ , avec  $c'_0$  face de codimension un de  $c_0$ . Alors l'application restriction  $\Omega^*(c) \rightarrow \Omega^*(c')$  possède une section  $\mathcal{S}$  vérifiant:

- a)  $\mathcal{S}\omega$  est modérée, si  $\omega$  est modérée,
- b)  $\max(\|\mathcal{S}\omega\|_i, \|d\mathcal{S}\omega\|_i) \leq \max(\|\omega\|_i, \|d\omega\|_i)$ , pour  $i \in \{0, \dots, n+1\}$ ,
- c) la restriction de  $\mathcal{S}\omega$  à une face  $c^*$  de  $c$ , est nulle si la restriction de  $\omega$  à  $c \cap c^*$  est nulle,
- d) la restriction de  $\mathcal{S}\omega$  à la face de  $c$  opposée à  $c'$  est nulle.

**Démonstration.** Posons  $c_0 = c'_0 \times [0, 1]$  et identifions  $c'_0$  avec  $c_0 \times \{0\}$ . On note  $Pr$  la projection canonique de  $c$  sur  $c'$  et  $s$  la variable de  $[0, 1]$ . On pose  $\mathcal{S}\omega = (1-s)Pr^*\omega$ ; c'est bien une forme différentielle sur  $c$  qui étend  $\omega$ :  $\mathcal{S}\omega|_{s=0} = \omega$ . Il nous reste à montrer a), b) c) et d).

- a) La forme  $\omega$  ne contenant ni  $s$  ni  $ds$ , on a:  $\text{poids}(\mathcal{S}\omega) \leq \max(1, \text{poids}(\omega)) \leq q$ .
- b) Nous avons l'inégalité

$$\max(\|\mathcal{S}\omega\|_i, \|d\mathcal{S}\omega\|_i) \leq \max(\|Pr^*\omega\|_i, \|d(1-s)\|_i + \|Pr^*\omega\|_i, \|Pr^*d\omega\|_i).$$

D'après le Lemme précédent le  $i$ -degré vertical  $\|d(1-s)\|_i$  est nul. Il suffira donc de prouver:  $\|Pr^*\omega\|_i \leq \|\omega\|_i$ . Distinguons trois cas d'après la relation qu'il y a entre  $c \cap \mathcal{K}_i$  et  $c' \cap \mathcal{K}_i$ . N'oublions pas que si  $c \cap \mathcal{K}_i$  est non vide, alors  $c \cap \mathcal{K}_i$  est une face de  $c$  de codimension 0 ou 1, et de même pour  $c' \cap \mathcal{K}_i$ .

b1)  $c \cap \mathcal{K}_i = c' \cap \mathcal{K}_i \times [0, 1]$  (ceci est le cas pour  $c \cap \mathcal{K}_i = \emptyset, c$  ou  $c' \cap \mathcal{K}_i \neq \emptyset$  et  $\neq c'$ ). Si nous prouvons que  $Pr$  envoie la (trace de  $c$  sur les fibres au-dessus de  $K_i - K_{i-1}$ ) sur la (trace de  $c'$  sur les fibres au-dessus de  $K_i - K_{i-1}$ ) on aura fini, car ainsi on aura  $\|Pr^*\omega\|_i \leq \|\omega\|_i$ .

Soit donc  $x \in \mu(c) \cap (K_i - K_{i-1})$ , l'affirmation précédente découle des égalités suivantes, montrées aisément à partir de la définition de  $\mu$ :

$$\mu^{-1}(x) \cap c = \{P_0\} \times \{P_1\} \times \cdots \times \{P_i\} \times c_{i+1} \times \cdots \times c_n, \text{ et}$$

$$\mu^{-1}(x') \cap c' = \{P'_0\} \times \{P_1\} \times \cdots \times \{P_i\} \times c_{i+1} \times \cdots \times c_n,$$

où  $x' = \mu(\text{Pr}(Q))$  avec  $Q \in \mu^{-1}(x) \cap c$ .

b2)  $c \cap \mathcal{K}_i = c'$ . Ici on a  $\mu^{-1}(x) \cap c = \mu^{-1}(x) \cap c'$  pour tout  $x \in \mu(c) \cap (K_i - K_{i-1})$ .

b3)  $c \cap \mathcal{K}_i = c' \times \{1\}$ . Dans ce cas la coordonnée  $s$  de  $c \cap \mathcal{K}_i$  est 1 et donc  $S\omega|_{c \cap \mathcal{K}_i} \equiv 0$ ; par conséquent  $\|\mathcal{S}\omega\|_i = \|d\mathcal{S}\omega\|_i = -\infty$ .

c)  $\mathcal{S}\omega|_{c^*} = s|_{c^*} \omega|_{c^* \cap c'} = 0$ .

d)  $\mathcal{S}\omega|_{s=1} = 0$ . ♣

**Lemme 4.2.4** Soient  $\mathcal{C}$  un complexe cubique et  $\mathcal{C}'$  un sous-complexe cubique de  $\mathcal{C}$ . Alors l'application restriction  $\Omega^*(\mathcal{C}) \rightarrow \Omega^*(\mathcal{C}')$  possède une section  $\mathcal{S}$  vérifiant

a)  $\mathcal{S}\omega$  est modérée, si  $\omega$  est modérée,

b)  $\max(\|\mathcal{S}\omega\|_i, \|d\mathcal{S}\omega\|_i) \leq \max(\|\omega\|_i, \|d\omega\|_i)$ , pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

**Démonstration.** Procédons par étapes.

- $\mathcal{C} = c$  et  $\mathcal{C}' = c \cup c'$ , faces de codimension un de  $c$ . L'application du Lemme précédent assure l'existence d'une forme différentielle  $\omega'$  sur  $c$  vérifiant a)-d) pour  $c'$ . Considérons  $\eta = \omega|_{c''} - \omega'|_{c''}$  forme différentielle sur  $c''$  et posons  $\eta'$  la forme différentielle sur  $c$  donnée par le Lemme précédent pour  $c''$ . La forme  $\omega' + \eta'$  est dans  $\Omega^*(c)$  et vérifie  $(\eta' + \omega')|_{c'} = \omega|_{c'}$ ,  $(\eta' + \omega')|_{c''} = \omega|_{c''}$ , a) et b).

- $\mathcal{C} = c$  et  $\mathcal{C}'$  sous-complexe de dimension  $n-1$ . Il suffit de réitérer l'argument précédent.

- Cas général. Nous procédons par récurrence sur  $n = \dim \mathcal{C}$ . Comme le cas  $\dim \mathcal{C} = 0$  est trivial, on supposera le résultat montré pour les complexes de dimension strictement inférieure à  $n$ . Soit  $\mathcal{C}^{(n-1)}$  la réunion des cubes de  $\mathcal{C}$  de dimension  $n-1$ , c'est un sous-complexe cubique de dimension  $n-1$ . Si nous appliquons l'hypothèse de récurrence à  $(\mathcal{C}^{(n-1)}, \mathcal{C}^{(n-1)} \cap \mathcal{C}')$  nous pouvons étendre  $\omega \in \Omega^*(\mathcal{C}')$  en une

forme sur  $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}^{(n-1)}$  vérifiant a) et b). Maintenant on peut appliquer le cas précédent, car pour tout cube de  $\mathcal{C}$  de dimension  $n$ , la forme  $\omega$  est définie sur le bord de  $c$ . ♣

On est arrivé au Lemme d'extension.

**Proposition 4.2.5** *L'application restriction  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) \rightarrow IT_{\bar{p}}^{*,q}(\mathcal{L}(K))$  est surjective.*

**Démonstration.** Soit  $\omega \in IT_{\bar{p}}^{*,q}(\mathcal{L}(K))$ ;  $c$ 'est une forme de  $\bar{p}$ -intersection dans  $\widetilde{K}$  (cf. (4.1.5)). D'après le Lemme précédent la forme  $\mathcal{S}\omega$  est l'image de  $\omega$  par la section cherchée. ♣

### 4.3 Lemme de Poincaré

Nous montrons dans cette section comment calculer la cohomologie de  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(\Delta * K)$  (où  $\Delta$  est le simplexe standard de dimension  $l$ ) á partir de celle de  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$ . Le résultat obtenu est analogue à (2.3.3).

$$\text{Rappelons tout d'abord que la filtration de } \Delta * K \text{ est: } (\Delta * K)_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i < l \\ \Delta & \text{si } i = l \\ \Delta * K_{i-l-1} & \text{si } i > l \end{cases} .$$

L'éclatement est l'application  $\mu_{\Delta * K} : \Delta * \widetilde{K} = c\Delta * \widetilde{K} \rightarrow \Delta * K$  définie par  $\mu_{\Delta * K}([x, t], \tilde{y}) = tx + (1-t)\mu_K(\tilde{y})$  (cf. (3.2.4)). Les  $i$ -faces de  $\Delta * \widetilde{K}$  sont:  $c\Delta \times \mathcal{K}_{i-l-1}$ , si  $i \geq l+1$ , et  $\Delta \times \{1\} \times \widetilde{K}$ , si  $i = l$ .

Dans ce dernier cas l'éclatement  $\mu_{\Delta * K}$  devient la projection sur le premier facteur.

L'application qui relie la cohomologie des deux complexes est la projection.

**Proposition 4.3.1** *La projection canonique sur le deuxième facteur  $pr : c\Delta \times \widetilde{K}_{\square} \rightarrow \widetilde{K}_{\square}$  induit les applications  $pr^* : IT_{\bar{p}}^{j,q}(K) \rightarrow IT_{\bar{p}}^{j,q}(\Delta * K)$  pour  $j < n-1-p_{n+1}$  et  $pr^* : IT_{\bar{p}}^{j,q}(K) \cap d^{-1}(0) \rightarrow IT_{\bar{p}}^{j,q}(\Delta * K)$  pour  $j = n-1-p_{n-1}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\omega \in IT_{\bar{p}}^{j,q}(K)$ . La forme  $pr^*\omega$  est modérée par construction. Il reste à montrer que son  $i$ -degré vertical est majoré par  $v-i-2-p_{v-i}$ , pour  $i \in \{l, \dots, v\}$ .

Soit  $z = tx + (1-t)y$  un point de  $(\Delta * K)_i - (\Delta * K)_{i-1}$ . Un calcul simple montre  $\mu_{\Delta * K}^{-1}(z) = \begin{cases} [x, t=1] \times \widetilde{K} & \text{si } i = l \\ [x, t] \times \mu_K^{-1}(y) & \text{si } i > l \end{cases}$ . Ainsi  $\|pr^*\omega\|_i = \begin{cases} j & \text{si } i = l \\ \|\omega\|_{i-l-1} & \text{si } i > l \end{cases}$ . Par hypothèse et en utilisant le fait que  $\omega$  est permise nous arrivons à  $\|pr^*\omega\|_i \leq v-i-2-p_{v-i}$ . ♣

**4.3.2** La procédure que l'on va suivre pour démontrer que cette flèche induit un isomorphisme en cohomologie, consiste à décomposer l'éclaté de  $\Delta * K$  en deux sous-complexes (cf. (21)):  $\Delta \times [0, 1] \times \widetilde{K}$  et  $\diamond_{\Delta} \times \widetilde{K}$ , et à étudier chacun d'entre eux, ainsi que leur intersection  $\Delta \times \{0\} \times \widetilde{K}$ .

Pour cela, nous considérons d'abord la situation locale. Fixons un cube  $c$  de la cubication de  $c\Delta$  et une face  $c'$  de codimension un de  $c$ . Ainsi  $c = c' \times [0, 1]$ , on identifiera  $c'$  avec  $c' \times \{0\}$ . Nous supposons que  $c$  et  $c'$  satisfont la relation:

$$(23) \quad c \cap (\Delta \times \{1\}) = (c' \cap (\Delta \times \{1\})) \times [0, 1].$$

Nous étudions dans les Lemmes qui suivent la relation entre la cohomologie des formes modérées d'intersection de  $c \times \widetilde{K}_{\square}$  et celle de  $c' \times \widetilde{K}_{\square}$ . Les applications utilisées pour y arriver sont: la projection canonique  $Pr_c : c \rightarrow c'$  et les applications  $Pr : c \times \widetilde{K}_{\square} \rightarrow c' \times \widetilde{K}_{\square}$  et  $\iota : c' \times \widetilde{K}_{\square} \rightarrow c \times \widetilde{K}_{\square}$  définies respectivement par  $Pr(y, x) = (Pr_c(y), x)$  et  $\iota(y, x) = (y, x)$ .

Dans la suite on fera l'abus de notation suivant. Pour tout sous-complexe cubique  $\mathcal{C}$  de  $\widetilde{K}_{\square}$  ou de  $(\Delta * K)_{\square}$  on notera  $IT_{\overline{p}}^{*,q}(\mathcal{C})$  le complexe des formes modérées d'intersection de  $\mathcal{C}$ .

**Lemme 4.3.3** *Les applications  $Pr^* : IT_{\overline{p}}^{*,q}(c' \times \widetilde{K}_{\square}) \rightarrow IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_{\square})$  et  $\iota^* : IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_{\square}) \rightarrow IT_{\overline{p}}^{*,q}(c' \times \widetilde{K}_{\square})$  sont bien définies.*

**Démonstration.** Il est évident que la restriction  $\iota^*$  des formes est bien définie et que l'opérateur  $Pr^*$  conserve le caractère modéré des formes. Soit donc  $\omega \in IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_{\square})$ , montrons que  $Pr^*\omega$  est d'intersection.

La condition (23) assure, pour  $i = l$ , l'égalité  $(c \times \widetilde{K}_{\square}) \cap (i\text{-face de } \widetilde{K}_{\square}) = (c \cap (\Delta \times \{1\})) \times \widetilde{K}_{\square} = (c' \cap (\Delta \times \{1\})) \times \widetilde{K}_{\square} \times [0, 1] = ((c' \times \widetilde{K}_{\square}) \cap (i\text{-face de } \widetilde{K}_{\square})) \times [0, 1]$ . Pour  $i \geq l + 1$  la description des  $i$ -faces de  $(\Delta * K)_{\square}$ , faite au début de cette section, permet d'arriver à la même conclusion:  $(c \times \widetilde{K}_{\square}) \cap (i\text{-face de } \widetilde{K}_{\square}) = c \times (\mathcal{K}_i)_{\square} = c' \times (\mathcal{K}_i)_{\square} \times [0, 1] = ((c' \times \widetilde{K}_{\square}) \cap (i\text{-face de } \widetilde{K}_{\square})) \times [0, 1]$ . Nous sommes donc dans les conditions de (4.2.3 b i)). Le même raisonnement que là-bas, montre que  $\|Pr^*\omega\|_i \leq \|\omega\|_i$  et  $\|Pr^*d\omega\|_i \leq \|d\omega\|_i$ . La forme  $Pr^*\omega$  est donc d'intersection. ♣

La composée  $\iota^* Pr^*$  est l'identité sur  $IT_{\tilde{p}}^{*,q}(c' \times \widetilde{K}_{\square})$ . Nous allons construire dans la suite une homotopie entre  $Pr^* \iota^*$  et l'identité sur  $IT_{\tilde{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_{\square})$ .

Toute forme  $\omega$  de  $c \times \widetilde{K}_{\square}$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\alpha + ds \wedge \beta$ , où  $s$  est la variable de  $[0, 1]$  et  $\alpha$  et  $\beta$  ne contiennent pas le terme  $ds$ . On pose  $\mathcal{D}\omega = \int_0^- \beta \wedge ds$ ; ceci définit l'opérateur  $\mathcal{D} : \Omega^*(c \times \widetilde{K}_{\square}) \rightarrow \Omega^{*-1}(c \times \widetilde{K}_{\square})$ .

**Lemme 4.3.4** *Soit  $\omega$  une forme modérée d'intersection sur  $c \times \widetilde{K}_{\square}$ , Alors:*

- a)  $\mathcal{D}\omega$  est modérée et d'intersection,
- b)  $d\mathcal{D}\omega + \mathcal{D}d\omega = \omega - Pr^* \iota^* \omega$ .

**Démonstration.** Nous vérifions les trois faits suivants:

- 1.  $\mathcal{D}\omega$  est modérée.

La forme  $\omega$  s'écrit comme un somme finie  $\sum_{i=0}^N s^i (\eta_i + ds \wedge \gamma_i)$ , où  $\eta_i$  et  $\gamma_i$  ne contiennent pas les termes  $s$  et  $ds$ . On aura donc  $\max(i, \text{poids}(\eta_i)) \leq q$  si  $\eta_i \neq 0$ , et  $\max(i+1, \text{poids}(\gamma_i)) \leq q$  si  $\gamma_i \neq 0$ . D'autre part,  $\mathcal{D}\omega$  est égale à  $\sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} s^{i+1} \gamma_i$ . D'après les inégalités précédentes nous pouvons écrire

$$\frac{1}{i+1} \in Q_q \text{ si } \gamma_i \neq 0, \text{ et } \text{poids}(\mathcal{D}\omega) \leq \max(i+1, \text{poids}(\gamma_i) / \gamma_i \neq 0) \leq q.$$

- 2.  $d\mathcal{D}\omega + \mathcal{D}d\omega = \omega - Pr^* \iota^* \omega$ .

Par linéarité, il suffira de prouver le résultat pour  $\omega = s^i (\eta_i + ds \wedge \gamma_i)$ . Il découle des égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}d\omega &= \mathcal{D}(i s^{i-1} ds \wedge \eta_i + s^i (d\eta_i - ds \wedge d\gamma_i)) = s^i \eta_i - Pr^* \iota^* (s^i \eta_i) - \int_0^- s^i d\gamma_i \wedge ds = \\ &= s^i \eta_i - Pr^* \iota^* \omega - d\left(\int_0^- s^i \gamma_i \wedge ds\right) + s^i ds \wedge \gamma_i = \omega - Pr^* \iota^* \omega - d\mathcal{D}\omega. \end{aligned}$$

- 3.  $\mathcal{D}\omega$  est une forme d'intersection.

Supposons montré que  $\|\mathcal{D}\omega\|_i \leq \|\omega\|_i$ , pour  $i \geq l$ . La forme  $\mathcal{D}\omega$  est donc permise. La relation b) montre que  $d\mathcal{D}\omega$  est aussi permise. La forme  $\mathcal{D}\omega$  est donc d'intersection.

Pour prouver l'inégalité  $\|\mathcal{D}\omega\|_i \leq \|\omega\|_i$ , il suffira de vérifier que pour tout vecteur  $v$  de  $(c \times \widetilde{K}_\square) \cap (i\text{-face de } (\Delta * \widetilde{K})_\square)$  tangent aux fibres de  $\mu_{\Delta * K}$  on a

$$(24) \quad \mathcal{D}(v) = \pm \int_0^- \omega(v).$$

Rappelons que l'on a  $(c \times \widetilde{K}_\square) \cap (i\text{-face de } (\Delta * \widetilde{K})_\square) = \begin{cases} (c' \cap (\Delta \times \{1\})) \times [0, 1] \times \widetilde{K}_\square & \text{si } i = l \\ c' \times [0, 1] \times (\mathcal{K}_{i-l-1})_\square & \text{si } i > l \end{cases}$ . Dans les deux cas,  $v$  est un vecteur tangent à la troisième composante et donc  $ds(v) = 0$ . D'où (24). ♣

On arrive à la

**Proposition 4.3.5** *Soit  $c$  un cube de la cubication de  $c\Delta$ , alors:*

- a)  $H^*(IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_\square)) \cong H^*(IT_{\overline{p}}^{*,q}(c' \times \widetilde{K}_\square))$ , si  $c = c' \times [0, 1]$  vérifie (23),
- b)  $H^*(IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_\square)) \cong H^*(IT_{\overline{p}}^{*,q}(\widetilde{K}_\square))$ , si  $c \cap (\Delta \times \{1\}) = \emptyset$ , et
- c)

$$H^j(IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_\square)) \cong \begin{cases} H^j(IT_{\overline{p}}^{*,q}(\widetilde{K}_\square)) & \text{si } j \leq n - 1 - p_{n+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

si  $c = c'' \times [0, 1]$  avec  $c \cap (\Delta \times \{1\}) = c''$ .

Dans les trois cas l'isomorphisme de modules est donné par la projection.

**Démonstration.** a) Le lemme précédent montre que  $\mathcal{D}$  est une homotopie entre  $Pr^* \iota^*$  et l'identité de  $IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_\square)$ . Par conséquent la projection  $Pr$  induit un isomorphisme entre  $H^*(IT_{\overline{p}}^{*,q}(c \times \widetilde{K}_\square))$  et  $H^*(IT_{\overline{p}}^{*,q}(c' \times \widetilde{K}_\square))$  (cf. (4.3.3)).

b) On pose  $c = [0, 1]^a$  et on applique le résultat précédent  $a$  fois. L'hypothèse  $c \cap (\Delta \times \{1\}) = \emptyset$  assure que chaque  $[0, 1]^i$ ,  $i \in \{1, \dots, a\}$ , satisfait (23).

c) Posons  $c'' = [0, 1]^a$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, a\}$ , le cube  $[0, 1]^i \times [0, 1]$  avec la face  $[0, 1]^{i-1} \times [0, 1]$  vérifient (23). Nous appliquons a) et nous obtenons un isomorphisme  $H^*(c \times \widetilde{K}_\square) \cong H^*([0, 1] \times \widetilde{K}_\square)$  induit par la projection. Il reste à calculer le deuxième terme, où  $[0, 1]$  est un cube de la cubication de  $c\Delta$  avec  $[0, 1] \cap (\Delta \times \{1\}) = \{1\}$ .

La trace de  $[0, 1] \times \widetilde{K}_\square$  sur la  $i$ -face de  $\Delta^* K$  est

- 1)  $[0, 1] \times (\mathcal{K}_{i-l-1})_\square$  si  $i > l$ ,
- 2)  $\{1\} \times \widetilde{K}_\square$  si  $i = l$

et l'ensemble vide ailleurs. Remarquons que le  $l$ -degré vertical d'une forme  $\omega$  de  $[0, 1] \times \widetilde{K}_\square$  est le degré de la restriction  $\omega|_{s=1}$  ( $s$  étant la variable de  $[0, 1]$ ). Ainsi, pour  $j \leq n - 1 - p_{n+1}$ , les conditions qui font de  $\omega$  une forme d'intersection sont les conditions de 1). C'est la situation que nous trouvons en a), d'où la première partie du résultat.

Soient  $j > n - 1 - p_{n+1}$  et  $\omega$  un cocycle de  $IT_{\overline{p}}^{j,q}([0, 1] \times \widetilde{K}_\square)$ . La forme  $\omega$  s'écrit comme une somme  $\alpha + ds \wedge \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  ne contiennent pas le terme  $ds$ . Soit  $\mathcal{D}_1\omega$  la forme  $\int_1^- \beta \wedge ds$ . La même démonstration que en (4.3.4) prouve que  $\mathcal{D}_1\omega$  vérifie la condition 1). D'autre part, la restriction  $\mathcal{D}_1\omega|_{s=1}$  est nulle par construction. Ainsi,  $\mathcal{D}_1\omega$  est un élément de  $IT_{\overline{p}}^{j-1,q}([0, 1] \times \widetilde{K}_\square)$ . Toujours d'après (4.3.4), on a la relation:  $\mathcal{D}_1\omega = \omega - Pr^*\omega|_{s=1}$ . Puisque  $|\omega|_l \leq n - 1 - p_{n+1}$  nous voyons que  $\omega|_{s=1}$  est la forme nulle. La restriction de  $d\mathcal{D}_1\omega = \omega$  montre que la classe de  $\omega$  est nulle. Ceci termine la démonstration. ♣

Remarquons que  $\diamond_\Delta \times \widetilde{K}_\square$  se trouve dans les conditions de la Proposition. Une simple généralisation de ce résultat donne

**Lemme 4.3.6** *Soit  $\mathcal{C} \times [0, 1]$  un sous-complexe cubique de la cubication de  $c\Delta$  vérifiant:  $(\mathcal{C} \times [0, 1]) \cap ((\Delta)_\square \times \{1\}) = (\mathcal{C} \cap ((\Delta)_\square \times \{1\})) \times [0, 1]$ . La projection de  $\mathcal{C} \times [0, 1]$  sur  $\mathcal{C}$  induit l'isomorphisme*

$$H^*(IT_{\overline{p}}^{j,q}(\mathcal{C} \times [0, 1] \times \widetilde{K}_\square)) \cong H^*(IT_{\overline{p}}^{j,q}(\mathcal{C} \times \widetilde{K}_\square)).$$

**Démonstration.** Les cubes de  $\mathcal{C}$  sont de la forme  $c = c' \times [0, 1]$  et ils vérifient (23). On procède comme dans la partie a) de la Proposition précédente en étendant les applications  $Pr$ ,  $\iota$  et  $\mathcal{D}$  au complexe  $\mathcal{C} \times [0, 1]$  tout entier. ♣

Ce résultat permet d'établir la

**Proposition 4.3.7** *La projection  $pr$  induit un isomorphisme de modules*

$$H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}((\Delta)_{\square} \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square})) \cong H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}(\widetilde{K}_{\square})).$$

**Démonstration.** Soit  $R$  une face de  $\Delta \times \{0\}$ , on prouve par récurrence sur la dimension de  $R$  que la projection  $pr$  induit un isomorphisme  $H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}(R_{\square} \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square})) \cong H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}(\widetilde{K}_{\square}))$ . Comme le résultat est trivial pour  $\dim R = 0$ , on suppose l'énoncé vrai pour toute face de  $R$ . Fixons  $S$  une face de codimension un de  $R$ . Rappelons que l'on a la décomposition  $R = cS = \diamond_S \cup (S \times [0, 1])$  avec  $\diamond_S \cap (S \times [0, 1]) = S \times \{0\}$ . Considérons le diagramme commutatif (cf. (4.2.4))

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker \rho_2 & \rightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(S_{\square} \times [0, 1] \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square}) & \xrightarrow{\rho_2} & IT_{\bar{p}}^{*,q}(S_{\square} \times \{0\} \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square}) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow \rho_3 & & \uparrow \rho_4 & & \uparrow \rho_5 & & \\ 0 & \rightarrow & \ker \rho_1 & \rightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(R_{\square} \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square}) & \xrightarrow{\rho_1} & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\diamond_S \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où  $\rho$  est la restriction des formes.

Remarquons que  $\rho_3$  est l'identité car  $\diamond_S \cap (S \times [0, 1]) = S \times \{0\}$ . Puisque  $(\Delta \times \{0\}) \cap (\Delta \times \{1\}) = \emptyset$  nous pouvons appliquer les résultats précédents. Nous obtenons:

- $\rho_2$  induit un isomorphisme en cohomologie, d'après (4.3.6) et
- $\rho_5$  induit un isomorphisme en cohomologie, d'après (4.3.5 a)).

Le Lemme des cinq montre que  $\rho_4$  induit un isomorphisme en cohomologie. Puisque  $pr^*$  commute avec la restriction  $\rho$ ., on a le résultat voulu. ♣

Pour la deuxième partie de la décomposition de  $c\Delta$  on obtient la

**Proposition 4.3.8** *La projection  $pr$  induit un isomorphisme de modules*

$$H^j(IT_{\bar{p}}^{*,q}(\Delta_{\square} \times [0, 1] \times \widetilde{K}_{\square})) \cong \begin{cases} H^j(IT_{\bar{p}}^{*,q}(\widetilde{K}_{\square})) & \text{si } j \leq n - 1 - p_{n+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Démonstration.** On procède de façon analogue à la proposition précédente à l'aide du diagramme commutatif (cf. (4.2.4)):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow \ker \rho_2 & \rightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(S_{\square} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \widetilde{K}_{\square}) & \xrightarrow{\rho_2} & IT_{\bar{p}}^{*,q}(S_{\square} \times \{0\} \times [0, 1] \times \widetilde{K}_{\square}) & \rightarrow & 0 \\
 & & \rho_3 \uparrow & & \rho_4 \uparrow & & \rho_5 \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker \rho_1 & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(R_{\square} \times [0, 1] \times \widetilde{K}_{\square}) & \xrightarrow{\rho_1} & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\diamond_S \times [0, 1] \times \widetilde{K}_{\square}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où  $\rho$ . est la restriction des formes.

Remarquons que  $\rho_3$  est l'identité car  $\diamond_S \cap (S \times [0, 1]) = S \times \{0\}$ . Puisque  $(S \times [0, 1] \times [0, 1]) \cap (\Delta \times \{1\}) = S \times [0, 1] \times \{1\} = (S \times \{0\} \times \{1\}) \times [0, 1] = ((S \times \{0\} \times [0, 1]) \cap (\Delta \times \{1\})) \times [0, 1]$ , nous pouvons appliquer (4.3.6) et nous obtenons que  $\rho_2$  induit un isomorphisme en cohomologie. L'hypothèse de récurrence et (4.3.5 c)) (que l'on peut appliquer car  $(\diamond_S \times [0, 1]) \cap (\Delta \times \{1\}) = \diamond_S \times \{1\}$ ) montrent que  $\rho_5$  induit un isomorphisme en cohomologie. Le Lemme des cinq montre que  $\rho_4$  induit un isomorphisme en cohomologie. Puisque  $pr^*$  commute avec la restriction  $\rho$ ., on a le résultat voulu.  $\clubsuit$

On arrive finalement à

**Proposition 4.3.9** *La projection  $pr$  induit un isomorphisme de modules*

$$H^j(IT_{\bar{p}}^{*,q}(\Delta * K)) \cong \begin{cases} H^j(IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)) & \text{si } j \leq n - 1 - p_{n+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Démonstration.** Considérons le diagramme commutatif suivant (cf. (4.2.4)):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow \ker \rho_2 & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}((\Delta * K)_{\square}) & \xrightarrow{\rho_2} & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\diamond_{\Delta} \times \widetilde{K}_{\square}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \rho_3 \downarrow & & \rho_4 \downarrow & & \rho_5 \downarrow \\
 0 \longrightarrow \ker \rho_1 & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\Delta_{\square} \times [0, 1] \times \widetilde{K}_{\square}) & \xrightarrow{\rho_1} & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\Delta_{\square} \times \{0\} \times \widetilde{K}_{\square}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où  $\rho$ . est la restriction des formes.

Remarquons que  $\rho_3$  est l'identité, car  $\diamond_{\Delta} \cap (\Delta \times [0, 1]) = \Delta \times \{0\}$ . La flèche  $\rho_5$  induit un isomorphisme en cohomologie d'après (4.3.5 b)) et (4.3.7). Le Lemme des cinq assure que  $\rho_4$  induit un isomorphisme en cohomologie. Il suffit maintenant a) de tenir compte de la Proposition précédente et du fait que  $pr$  commute avec la restriction.  $\clubsuit$

## 5 Théorème de deRham

A l'aide des calculs réalisés dans les sections 2 et 4, nous montrons dans cette section que pour un espace stratifié  $K$ , le complexe des formes modérées d'intersection calcule la cohomologie modérée de  $K$ . L'isomorphisme en question sera obtenu par l'intégration  $\int$  des formes sur les simplexes. Cette intégration n'est pas bien définie a priori. Pour pallier à cet inconvénient, on intègre en fait sur l'éclaté de  $K$ . Un point clé dans l'obtention de cet isomorphisme est la formule de Stokes, elle provient du fait que les éclatés des formes d'intersection s'annulent sur les faces ajoutées des éclatés des simplexes permis.

### 5.1 Intégration

Fixons une forme modérée d'intersection  $\omega$  de  $K$  et un cube  $c$  de  $\widetilde{K}_\square$  avec  $\mu(c)$  élément de  $\check{K} - \check{\Sigma}$ . On pose:

$$\int_{\mu(c)} \omega = \int_{\text{intérieur de } \mu(c)} \omega.$$

A priori cette intégrale pourrait être divergente. Or, si nous remontons à l'éclaté et si nous tenons compte du fait que la restriction de  $\mu$  à l'intérieur de  $c$  est un difféomorphisme, nous trouvons:

$$(25) \quad \int_{\mu(c)} \omega = \int_{\text{intérieur de } \mu(c)} \omega = \int_c \tilde{\omega},$$

qui est un élément de  $Q_q$  (cf. [5]).

Considérons  $\sigma$  un simplexe de  $K - \Sigma$ . On posera  $\int_\sigma \omega = \sum \int_{\mu(c)} \omega$ , où la somme s'étend sur les éléments de la cubication de  $\tilde{\sigma}$  de dimension maximale. D'après (25) cette intégrale est:

$$(26) \quad \int_\sigma \omega = \sum \int_c \tilde{\omega} = \int_{\tilde{\sigma}} \tilde{\omega};$$

qui est un nombre de  $Q_q$ .

Pour toute chaîne  $\xi = \sum_{i \in I} q_i \sigma_i$ , avec  $q_i \in Q_q$  et  $\sigma_i \in K - \Sigma$  pour  $i \in I$ , on posera  $\int_\xi \omega = \sum_{i \in I} q_i \int_{\sigma_i} \omega$ , qui appartient à  $Q_q$ . Rappelons que si  $\xi$  est une chaîne permise alors on a la relation:

$$(27) \quad \dim(|\xi| \cap |\Sigma|) \leq \dim |\xi| - 2 + p_2 \leq \dim |\xi| - 2 ,$$

c'est-à-dire, la chaîne  $\xi$  n'a pas de simplexes dans  $\Sigma$  et nous pouvons définir  $\int_{\xi} \omega$ . Nous avons ainsi construit l'opérateur:

$$\int : IT_{\overline{p}}^{*,q}(K) \longrightarrow IC_{\overline{p}}^*(K; Q_q) / \omega \mapsto (\xi \mapsto \int_{\xi} \omega).$$

Cet opérateur est différentiel, comme le prouve la formule de Stokes suivante.

**Proposition 5.1.1** *Pour tout simplexe permis  $\sigma$  et toute forme modérée et d'intersection  $\omega$  nous avons:*

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que les deux termes de l'égalité précédente ont un sens car, en procédant comme dans (27):  $\dim(\sigma \cap |\Sigma|) \leq \dim \sigma - 2$ . D'après (26) nous pouvons écrire  $\int_{\sigma} d\omega = \int_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\omega}$  et  $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\tilde{\partial\sigma}} \tilde{\omega}$ . D'autre part, la formule de Stokes habituelle dans  $\tilde{K}$  établit:  $\int_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\omega} = \int_{\tilde{\partial\sigma}} \tilde{\omega}$ . On est donc ramené à montrer que  $\int_{\partial_b\sigma} \tilde{\omega} = 0$  (cf. (3.1.2)). Puisque  $\partial_b\sigma$  est inclus dans la réunion des i-faces de  $\tilde{K}$  il suffira de prouver que la restriction de  $\tilde{\omega}$  à chaque  $\sigma_{\square} \cap (\mathcal{K}_i)_{\square}$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  est nulle.

Fixons un tel  $i$  et soit  $c$  un cube de  $\sigma_{\square} \cap (\mathcal{K}_i)_{\square}$  de dimension maximale  $\dim \sigma - 1$ . Remarquons que l'intérieur de  $c$  est dense dans  $c - |\bigcup_{j < i} \mathcal{K}_j|$  et que  $\mu(c)$  est inclus dans  $\sigma \cap |K_i|$ . Si la restriction de  $\tilde{\omega}$  à  $c$  n'est pas la forme nulle, alors le  $i$ -degré vertical de  $\omega$  est supérieur ou égal à la dimension des fibres de

$$\mu : \{\text{intérieur de } c\} \longrightarrow \{\text{intérieur de } \mu(c)\},$$

c'est-à-dire:  $\|\omega\|_i \geq \dim c - \dim \mu(c) \geq \dim \sigma - 1 - \dim(\sigma \cap |K_i|)$ . Les conditions d'intersection (11) et (22) permettent d'écrire  $n - i - 2 - p_{n-i} \geq \|\omega\|_i \geq \dim \sigma - \dim(\sigma \cap |K_i|) - 1 \geq n - i - p_{n-i} - 1$ . Cette contradiction implique la nullité de  $\tilde{\omega}|_c$  et donc celle de  $\int_{\partial_b\sigma} \tilde{\omega}$ . ♣

## 5.2 Théorème de deRham

Tous les résultats montrés jusqu'à présent nous amènent au Théorème de deRham suivant, qui constitue le noyau de cet article.

**Théorème 5.2.1** *Pour tout complexe stratifié  $K$  l'intégration des formes induit un isomorphisme de modules entre  $H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q}(K))$  et  $IH_{\bar{p}}^*(K; Q_q)$ .*

**Démonstration.** Nous procédons par récurrence sur la profondeur de  $K$ . Si cette profondeur est zéro alors  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) = T^{*,q}(K_{\square})$  et  $IC_{\bar{p}}^*(K; Q_q) = C^*(K; Q_q)$ ; le résultat découle de [5].

Supposons maintenant le résultat prouvé pour les espaces stratifiés de profondeur strictement inférieure à celle de  $K$ . Considérons le diagramme commutatif suivant (cf. (2.2.2) et (4.2.5)):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & IC_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); Q_q) & \longrightarrow & IC_{\bar{p}}^*(K; Q_q) & \longrightarrow & IC_{\bar{r}}^*(\mathcal{L}(K); Q_q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K)) & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(K) & \longrightarrow & IT_{\bar{r}}^{*,q}(\mathcal{L}(K)) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence l'intégrale  $f_3$  induit un isomorphisme en cohomologie. Il suffira de prouver que l'intégrale  $f_1$  induit un isomorphisme en cohomologie.

Puisque  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K, \mathcal{L}(K)) \cong \prod_{\alpha \in I_m} IT_{\bar{p}}^{*,q}(\alpha * L_{\alpha}, \delta \alpha * L_{\alpha})$  (cf. (4.2.1)) et  $IC_{\bar{p}}^*(K, \mathcal{L}(K); Q_q) \cong \prod_{\alpha \in I_m} IC_{\bar{p}}^*(\alpha * L_{\alpha}, \delta \alpha * L_{\alpha}; Q_q)$  (cf. (2.2.4)) on est ramené à montrer que dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & IC_{\bar{p}}^*(\alpha * L_{\alpha}, \delta \alpha * L_{\alpha}; Q_q) & \longrightarrow & IC_{\bar{p}}^*(\alpha * L_{\alpha}; Q_q) & \longrightarrow & IC_{\bar{r}}^*(\delta \alpha * L_{\alpha}; Q_q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 & & \downarrow f_6 & & \\ 0 & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\alpha * L_{\alpha}, \delta \alpha * L_{\alpha}) & \longrightarrow & IT_{\bar{p}}^{*,q}(\alpha * L_{\alpha}) & \longrightarrow & IT_{\bar{r}}^{*,q}(\delta \alpha * L_{\alpha}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

la flèche  $f_4$  induit un isomorphisme en cohomologie. Or, ceci est le cas car: 1) d'après (4.3.9), (2.3.3) et l'hypothèse de récurrence, l'intégrale  $f_5$  induit un isomorphisme en cohomologie et 2) d'après l'hypothèse de récurrence, l'intégrale  $f_6$  induit un isomorphisme en cohomologie. ♣

**5.2.2 Indépendance de la triangulation et de la stratification.** Bien que le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  des formes différentielles d'intersection modérées dépende de la triangulation et de la stratification choisies dans  $K$ , le Théorème de deRham que nous venons de prouver montre que ledit complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  calcule toujours la cohomologie d'intersection de  $K$ . Mais cette relation qui apparaît au niveau de la cohomologie peut être réalisée au niveau des formes différentielles, de la façon que nous passons à décrire.

Considérons le cas le plus simple de complexe stratifié:  $K = cL$ , où  $L$  est une variété de dimension  $n$ . Le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  devient  $\{\omega \in T^{*,q}((cL)_{\square}) / \max(\text{degré}(\omega|_{\{1\} \times L}), \text{degré}(d\omega|_{\{1\} \times L})) \leq p_{n+1}\}$ . En

utilisant l'homotopie le long du facteur  $[0, 1]$ , on prouve que le sous-complexe  $\{\omega \in T^{*,q}(L) / \max(\text{degré}(\omega), \text{degré}(d\omega)) \leq p_{n+1}\}$  calcule la même cohomologie. Cette idée, développée à l'aide des techniques utilisées tout au long des sections 4 et 5, permette de montrer que, pour un complexe stratifié  $K$  de dimension  $n$ , le sous-complexe de  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  donné par  $\mathcal{IT}_{\bar{p}}^{*,q}(K) = \{\omega \in T^{*,q}(C(\Sigma, K)) / \max(\text{degré}(\omega|_{\sigma}), \text{degré}(d\omega|_{\sigma}) \leq p_{n-k}, \text{ si } \sigma \in N(K_k, K)\}$  calcule la même cohomologie. Ici,  $C(K, L)$  et  $N(K, L)$  dénotent respectivement le complément simplicial et le voisinage simplicial de  $L$  dans  $K$  (cf. [14]).

Nous pouvons ainsi calculer la cohomologie d'intersection modérée de  $K$  à l'aide d'un complexe de formes modérées habituelles d'une variété simpliciale.

Soit  $K'$  une subdivision de  $K$ , compatible avec les  $Q_q$  coordonnées. Puisque  $c(\Sigma', K')$  se rétracte linéairement sur  $c(\Sigma, K)$ , il n'est pas difficile de vérifier que cette rétraction induit une homotopie entre  $\mathcal{IT}_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  et  $\mathcal{IT}_{\bar{p}}^{*,q}(K')$ .

En résumé, le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  est indépendant de la triangulation de  $K$  choisie, à une suite de quasi-isomorphismes près. Si maintenant on considère un complexe stratifié  $K$  provenant d'une pseudovariété stratifiée, et sur  $K$  une autre stratification, nous savons que les deux complexes respectifs des chaînes d'intersection calculent la même cohomologie d'intersection. Par conséquent, le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$  est indépendant de la stratification de  $K$  choisie, à une suite de quasi-isomorphismes près.

**5.2.3 Dualité de Poincaré.** Supposons  $K$  compact. Pour toute forme  $\omega$  de  $IT_{\bar{p}}^{*,q}(K)$ , l'intégrale sur  $K - \Sigma$  existe car  $\int_{K-\Sigma} \omega = \int_{\tilde{K}} \tilde{\omega}$  et car la forme  $\tilde{\omega}$  est globalement définie sur le complexe fini  $\tilde{K}$ . Ceci nous permet de définir l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle: IT_{\bar{p}}^{*,q_1}(K) \times IT_{\bar{q}}^{n-*,q_2}(K) \rightarrow Q_{q_1+q_2}$ , où  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont deux perversités quelconques et  $\langle \omega, \eta \rangle = \int_{A-\Sigma} \omega \wedge \eta$ . On montre que cet accouplement passe en cohomologie (formule de Stokes):

$$(28) \quad H^*(IT_{\bar{p}}^{*,q_1}(K)) \times H^{n-*}(IT_{\bar{q}}^{*,q_2}(K)) \longrightarrow Q_{q_1+q_2},$$

et que, si  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$  est la perversité maximale (cf. [9]), alors il est non dégénéré. C'est la dualité de Poincaré que nous trouvons à l'origine de l'homologie d'intersection (cf. [9]) et dont la version avec des formes différentielles réelles a été traitée à [3].

**5.2.4 Formule de Künneth.** Considérons  $K$  et  $K'$  deux complexes stratifiés. En utilisant la démarche suivie à (1.3) nous munissons  $K \times K'$ ,  $K$ , et  $K'$  avec des triangulations qui font de ces espaces des complexes stratifiés et pour lesquelles les projections canoniques  $pr: K \times K' \rightarrow K$  et  $pr': K \times K' \rightarrow K'$  sont des applications simpliciales. Ces projections s'éclatent donc en deux applications prismatiques  $\widetilde{pr}: K \widetilde{\times} K' \rightarrow \widetilde{K}$  et  $\widetilde{pr}': K \widetilde{\times} K' \rightarrow \widetilde{K}'$  qui sont linéaires sur chaque prisme. L'application  $P: H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K)) \otimes H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K')) \rightarrow H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K \times K'))$ , donnée par  $P([\omega] \otimes [\eta]) = [pr^*\omega \wedge (pr')^*\eta]$ , est donc bien définie. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K)) \otimes H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K')) & \xrightarrow{P} & H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K \times K')) \\ \int \otimes \int \downarrow & & \int \downarrow \\ IH_{\bar{p}}^*(K, Q_q) \otimes IH_{\bar{p}}^*(K', Q_q) & \xrightarrow{P'} & IH_{\bar{p}}^*(K \times K', Q_q) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes (cf.(5.2.1)). Si la perversité  $\bar{p}$  est dans les conditions de [7] (par exemple, si  $\bar{p}$  est la perversité moitié) il en sera de même pour  $P'$ . Dans ce cas, nous avons la formule de Künneth

$$H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K)) \otimes H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K')) \stackrel{P}{\cong} H^*(IT_{\bar{p}}^{\cdot,q}(K \times K')).$$

**5.2.5 Algebraicité.** Ce travail est le premier pas vers la construction d'un modèle minimal d'intersection de  $K$ . Cette démarche se heurte avec la difficulté suivante: le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,*}(K)$  n'est pas en général une algèbre. Par exemple, si les strates de  $K$  sont de dimension paire le produit de deux formes de  $IT_{\bar{m}}^{*,*}(K)$  est un élément  $IT_{\bar{0}}^{*,*}(K)$ , où  $\bar{m}$  est la perversité moitié (cf. [10]) (voir la relation du degré vertical avec le produit extérieur de (4.1.4)). Bien entendu, pour  $\bar{p} = \bar{0}$  le complexe  $IT_{\bar{p}}^{*,*}(K)$  est une algèbre (voir (28)) qui nous donne le modèle minimal de  $K$  ( $IH_{\bar{0}}^*(K) \cong H^*(K)$ ). Il est peut-être intéressant de signaler que, pour la plus part des perversités (celles qui ne touchent pas  $\bar{0}$ ), la plus petite algèbre contenant  $IT_{\bar{p}}^{*,*}(K)$  est précisément le complexe ambiant  $T^{*,*}(\widetilde{K})$ . Dans un prochain travail nous étudierons le "défaut d'algebraicité" du complexe des formes d'intersection modérées et la construction du modèle minimal d'intersection de  $K$ .

REMERCIEMENTS. Le premier et le troisième auteurs tiennent à remercier le Département de Mathématiques de l'Université Claude Bernard de Lyon pour l'occasion qui leur a été offerte de réaliser la majeure

partie de cet article au sein d'une agréable ambiance de travail. Le premier auteur remercie aussi le Département de Mathématiques de Lille I pour son hospitalité et l'atmosphère stimulante qui a entouré son travail à divers stades de ce papier. Les auteurs remercient le referee par ses suggestions qui leur ont permis de clarifier la présentation du travail.

## References

- [1] J.P. Brasselet, M. Goresky et R. MacPherson: *Simplicial differential formes with poles* - Amer. J. Math. **113**(1991), 1019-1052.
- [2] J.P. Brasselet, G. Hector et M. Saralegi: *Théorème de De Rham pour les variétés stratifiées* - Annals of Global Analysis and Geometry, **9**(1991), 211-243.
- [3] J.L. Brylinsky: *Equivariant intersection cohomology* - Prépublication de l'I.H.E.S., Juin 1986.
- [4] B. Cenk, G. Hector et M. Saralegi: *Tame intersection cohomology* . - Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, **11**(1991), 931-944.
- [5] B. Cenk et R. Porter: *De Rham theorem with cubical forms* - Pac. J. Math. **112**(1984), 35-48.
- [6] J. Cheeger: *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds* - Proc. of Sym. in Pure Math., Amer. Math. Soc. **36**(1980), 91-146.
- [7] D.C. Cohen, M. Goresky et L. Ji: *On the Künneth formula for intersection cohomology II* - Trans. Amer. Math. Soc. **333**(1992), 63-69.
- [8] K.H. Fiesler et L. Kaup: *On the hard Lefschetz theorem in intersection homology with isolated singularities* - Aequations Math. **34**(1987), 240-263.
- [9] M. Goresky et R. MacPherson: *Intersection homology theory* - Topology **19**(1980), 135-162.
- [10] M. Goresky et R. MacPherson: *Intersection homology II* - Inven. Math. **72**(1983), 77-129.

- 
- [11] M. Goresky et R. MacPherson: *Morse theory and intersection homology* - Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II-III), Astérisque **101-102**(1983), 135-192.
- [12] M. Goresky et W. Pardon: *Wu numbers of singular spaces* - Topology **28**(1989), 325-367.
- [13] R. MacPherson et K. Vilonen: *Elementary construction of perverse sheaves* - Inven. Math. **84**(1986), 403-435.
- [14] C.P. Rourke et B.J. Sanderson: *Introduction to piecewise linear topology* - Springer Study Edition (1982).
- [15] M. Saralegi: *Homological properties of stratified spaces*. - A paraître dans Illinois J. Math.
- [16] H. Scheerer, K. Schuch et E. Vogt: *Tame homotopy theory* - Préprint, Freie Universität Berlin, 1991.
- [17] E. Spanier: *Algebraic topology* - McGraw Hill, New York, 1966.
- [18] D. Sullivan: *Infinitesimal computations in topology* - Pub. Math. I.H.E.S. **47**(1978), 269-332.
- [19] A. Verona: *Stratified mappings - Structure and triangulability* - Lect. Notes in Math. 1102, Springer Verlag 1984.

Bohumil Cenkľ    Department of Mathematics.  
Northeastern University.  
567 Lake Hall.  
Boston, Massachussets 02115 - USA.  
cenkl@northeastern.edu

Gilbert Hector    Laboratoire de Géométrie et Analyse.  
U.R.A. D 746 au C.N.R.S.  
Université Claude Bernard (Lyon 1).  
69622 Villeurbanne Cedex - France.  
hector@geometrie.univ-lyon1-fr

Martin Saralegi    Unidad de Matemáticas.  
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental.  
Consejo Superior de Investigaciones Científicas.  
Serrano 123. 28006 Madrid - Espagne.  
saralegi@cc.csic.es

Faculté Jean Perrin.  
U.R.A. D 751 au C.N.R.S.  
Université d'Artois.  
rue Jean Souvraz S.P. 18 62307 Lens - France.  
saralegi@gat.univ-lille1.fr